

Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional
Colegio de Ciencias y Humanidades



Programas de Estudio

Área de Matemáticas

Matemáticas I - IV

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades
Programas de Estudio
Área de Matemáticas
Matemáticas I–IV
Primera edición: 2016.

Impreso en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

Índice

Presentación

A diferencia de otros sistemas, en la UNAM el bachillerato tiene carácter propedéutico; no es terminal, no es técnico, no está enfocado hacia un área específica del conocimiento. Esta es una determinación fundamental para la temática, las estrategias y los aprendizajes de los programas de cualquier materia.

El Colegio de Ciencias y Humanidades ofrece estudios de nivel medio superior, se distingue entre otras cosas por formar alumnos que estén en condiciones de aprovechar y utilizar durante toda su vida cada oportunidad que se les presente, de actualizar, profundizar y enriquecer ese primer saber y adaptarse a un mundo en permanente cambio (aprender a aprender), para poder influir sobre su propio entorno (aprender a hacer), promover el desarrollo de un ser sensible, con un sentido estético, responsable, solidario, tratando de lograr el despliegue completo del hombre en toda su riqueza y en la complejidad de sus expresiones y de sus compromisos (aprender a ser), individuo, miembro de una familia y de una colectividad (aprender a vivir juntos) y como fin último lograr un ser humano pleno.

En el anterior contexto, el centro de los programas de matemáticas son los aprendizajes de los alumnos, donde los saberes se construyen, sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la *resolución de problemas*, actividad fundamental para lograr un ser analítico, lógico y crítico, donde se pone de manifiesto la comunicación y el diálogo en un ambiente de aprendizaje.

Los aprendizajes esenciales en los programas de Matemáticas I-IV quedan comprendidos en cuatro ejes del desarrollo temático a lo largo de los cuatro primeros semestres: Álgebra, Geometría euclidiana, Geometría analítica y Funciones,

La tecnología digital ha impactado muchos aspectos de la vida diaria, la educación no está al margen. Para matemáticas, existen varias herramientas que pueden utilizarse para el desarrollo de algunos temas de bachillerato. Las tecnologías digitales son sólo otras herramientas que no desplazan a las ya existentes, ni son la solución mágica del problema del aprendizaje, son artefactos con potencial para apoyar algunos procesos de enseñanza y aprendizaje. Las tecnologías digitales ya están aquí, debemos poner atención y estudiar su utilidad, en particular a las llamadas herramientas universales: la hoja de cálculo, la geometría y estadística dinámicas y calculadoras con CAS.[1] Esta propuesta hace indicaciones puntuales sobre dónde y cómo pueden usarse.

[1] CAS (Computer Algebra System) Sistema de álgebra computarizado, *software* como *Derive*, *Mathematica* o *Maple*.

índice

Relaciones con el Área y con otras asignaturas

Los aprendizajes adquiridos en los cuatro ejes temáticos, antes mencionados, permiten al alumno madurar en su pensamiento lógico–deductivo, elemento importante en un diálogo constructivo sobre cualquier tema donde se defienden las propias posiciones, y se contra argumenta o acepta las de otros. Así como acceder a conocimientos más especializados contenidos en Probabilidad y Estadística, Cálculo Diferencial e Integral y Cibernética y Computación y de otras disciplinas como Física y Química.

Enfoque de la materia

Enfoque Disciplinario

La enseñanza de la matemática atiende los principios educativos del Colegio de Ciencias y Humanidades, para cumplirlos debe lograr habilidades del pensamiento que permitan a los estudiantes ser capaces de adquirir por sí mismos nuevos conocimientos, además analizar, interpretar y modificar el mundo que lo rodea.

Por lo que en el CCH se concibe a la matemática como una disciplina que:

- Posee un carácter dual: De ciencia y herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías para la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber, tanto humanístico como científico y tecnológico.
- Manifiesta una gran unidad. No obstante, la diversidad de ramas y especialidades en las que actualmente se divide, éstas se vinculan complementan o trabajan desde otro punto de vista a través de las otras partes que la integran.
- Contiene un conjunto de simbologías propias, bien estructuradas, sujetas a reglas específicas (simbología numérica, geométrica, algebraica), que permiten establecer representaciones de distinto nivel de generalidad sobre características, propiedades, relaciones y comportamientos; aspectos que contribuyen a avanzar en su construcción como ciencia y a extender el potencial de sus aplicaciones.

Esta concepción tiene como consecuencia desechar la enseñanza de la matemática como un conjunto de conocimientos acabados y organizados según la estructura formal y tomar la posición de desarrollar en el alumno habilidades intelectuales que caracterizan la construcción de la misma.

Enfoque Didáctico

La columna vertebral de la metodología didáctica es la resolución de problemas, que consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas cuidadosamente seleccionadas para despertar el interés de los alumnos, y los inviten a reflexionar. La resolución de problemas promueve el trabajo grupal, el diálogo entre alumnos, entre el maestro y los alumnos y apoya la construcción de un vínculo entre iguales para fomentar el trabajo en equipo, la solidaridad entre compañeros y la aceptación de la corresponsabilidad en el proceso educativo, favoreciendo el desarrollo de habilidades del pensamiento que permitan al alumno el aprender a aprender y el aprender a hacer.

Considerar la resolución de problemas como metodología didáctica no consiste simplemente en enfatizar esta actividad para dar "sentido" a una serie de conceptos y métodos que son previamente expuestos por el profesor, sino que éstos deben surgir, en el alumno, como necesidad en la etapa de comprensión de situaciones problemáticas o como generalización de la resolución y la solución de éstas.

Dado los tiempos institucionales, no se desecha la exposición de conceptos y métodos por parte del profesor, siempre y cuando la necesidad de su estudio surja en la etapa de comprensión de una situación problemática y éste plantee actividades que garanticen la comprensión de los mismos. Esta actividad creará los recursos básicos necesarios que en situaciones "nuevas" permitan el "descubrimiento", por generalización, de conceptos y métodos durante la reflexión sobre el procedimiento de solución y la solución de las mismas.

Por lo general, uno no puede suponer que los alumnos sean capaces de resolver problemas, muchos de ellos abordan esta actividad en forma caótica

índice

y con descuido, por lo que el resolver problemas aparte de ser una metodología didáctica, debe ser contemplado como objeto de aprendizaje. Así el profesor debe proporcionar ayudas para que sus alumnos transiten en forma organizada y creativa en el proceso de resolución de problemas. Estas ayudas son contempladas por autores como Polya y Schoenfeld como estrategias heurísticas.

Polya considera que en la actividad de resolución de problemas el profesor debe inducir a los estudiantes a transitar por las siguientes etapas:

a) Comprensión del problema.
Mediante preguntas como: ¿cuáles son los datos?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿qué condiciones se deben satisfacer entre datos e incógnitas?, ¿es posible que estas condiciones se puedan satisfacer?

b) Trazar un plan.
Mediante preguntas y sugerencias como: ¿puede reducir el presente problema a uno que sabe resolver?; recurra a las definiciones para plantear el problema en términos más operativos; considere la condición en partes y observe la forma en qué varía el elemento que se desea encontrar conforme a cada una de las partes y vea si esto le es útil para resolver el problema; trace un diagrama que ilustre las relaciones entre datos e incógnita y vea si esto le ayuda en la resolución del problema; considere casos particulares y vea si estos siguen un patrón; considere un problema análogo. Por ejemplo, en geometría: reduciendo dimensiones; trace líneas auxiliares; considere casos extremos y vea cómo ajustar a las condiciones originales; ¿conoce algún resultado o método que le pueda ser útil en el presente problema?; considere qué datos son necesarios para encontrar lo buscado y vea si estos aparecen en el planteamiento del problema, si no, repita el procedimiento para el dato o datos no presentes, hasta que arribe a datos presentes en el problema.

c) Ejecución del plan.
Sugiriendo el monitoreo del procedimiento escogido: justificando cada uno de los pasos, valorando el avance logrado a fin de seguir o cambiar de plan.

d) Retrospección.
Con sugerencias como: reflexione sobre lo realizado y piense si el método o la solución puede aplicarse en nuevos problemas; intente inventar otros problemas donde el procedimiento de solución sea el mismo; intente pensar en una situación práctica donde el problema pueda aplicarse; piense cómo el problema puede generalizarse.

Esta forma de proceder debe ser inducida primeramente con el planteamiento de estas sugerencias y preguntas por parte del profesor, hasta que el alumno lo haga de manera independiente.

índice

Contribución del Área de Matemáticas al perfil del egresado

La creación del Colegio de Ciencias y Humanidades abrió un nuevo paradigma educativo basado en los principios de aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser, y en un enfoque pedagógico centrado en el estudiante y su aprendizaje.

Ahora en el siglo XXI, el estudiante enfrenta nuevos retos, tanto en el ámbito escolar como en su posterior inserción en actividades profesionales; en una sociedad de acelerado acceso a la información y creciente avance tecnológico, es necesario que el trabajo en el aula favorezca el desarrollo de habilidades que contribuyan a formar a un ser capaz de aprender por sí mismo, que logre un desarrollo integral para hacerlo mejor ciudadano, con una actitud crítica ante la realidad y una cultura básica que lo capacite para estudios posteriores.

El Área de Matemáticas, como uno de los pilares principales en la formación de los estudiantes, contribuye al perfil del egresado al formar a un alumno que esté preparado para:

- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- Generar conocimientos a través de la resolución de problemas.
- Utilizar su conocimiento matemático en la resolución de problemas en contextos que lo requieran.
- Utilizar diversas formas de razonamiento que le permita en el análisis de eventos, tomar decisiones y ser consciente de la incertidumbre o certidumbre de los resultados de éstas.
- Elaborar conjeturas, construir argumentos de forma oral y escrita para validar o refutar los de otros.
- Incorporar a su lenguaje y modos de sistematización y argumentación habituales, diversas formas de representación matemática (numérica, tabular, gráfica, geométrica y algebraica) para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.
- Utilizar las nuevas tecnologías para la búsqueda de información relevante y su sistematización.
- Utilizar las tecnologías digitales para favorecer la adquisición de conocimientos.
- Adquirir el hábito de la lectura y comprensión de textos científicos, tanto escolares como de divulgación.
- Valorar las aportaciones de las matemáticas en todos los campos del saber.
- Exponer y aplicar sus conocimientos matemáticos con seguridad en sí mismo.

índice

Propósitos generales de la materia

En términos generales, la enseñanza de la matemática en el Colegio pretende:

Desarrollar la capacidad de análisis–síntesis en los alumnos para un mejor desempeño en la resolución de problemas y comprensión de conceptos.

Desarrollar una cultura básica matemática que le permita acceder a conocimientos más especializados y desempeñarse adecuadamente en situaciones problemáticas de la vida cotidiana. Entendiéndose por cultura básica matemática el conjunto de conocimientos, habilidades intelectuales y destrezas que permitan el logro de lo anterior.

Particularmente en los cuatro primeros semestres se trata de:

- Fomentar el trabajo en equipo como la forma de dinamizar la construcción del conocimiento en el contexto de la resolución de problemas.
- Revisar el conocimiento algebraico, ya visto en el ciclo escolar anterior con la perspectiva de generar sentido y actividad creativa en la resolución de problemas.
- Extender o ampliar el conocimiento algebraico con la inclusión del estudio de la geometría analítica, incorporando el lenguaje algebraico a las ideas geométricas, así como el estudio de funciones, para crear las bases de las asignaturas especializadas de quinto y sexto semestre.
- Desarrollar los pensamientos inductivo y deductivo en el alumno, en actividades de exploración y justificación, para incrementar las formas de argumentación del alumno en la resolución de problemas.

índice

Evaluación

La evaluación, elemento fundamental en la enseñanza, es motivo de continuo debate por las diversas concepciones que los profesores tienen al respecto. Para orientar este proceso, es necesario tener en cuenta que el enfoque de enseñanza del Colegio está basado en el logro de aprendizajes, lo que conlleva a diseñar instrumentos de evaluación que permitan valorar si se alcanzan y hasta qué nivel. Entre los más comunes se tienen: actividades de aprendizaje para una evaluación formativa continua, exámenes parciales individuales o por equipo, prácticas relativas a las tecnologías digitales, trabajos de investigación, tareas de refuerzo, bitácora o portafolio, listas de cotejo, rúbricas, bitácora COL, entre otras.

Otro tipo de consideraciones de igual importancia en la evaluación, es tener presente el desarrollo de habilidades, las cuales proveen registros a ser tomados en cuenta al valorar el desempeño de los alumnos cuando resuelven problemas, comunican su conocimiento y lo transfieren al mundo real, amplían su criterio o adquieren el hábito de trabajar en equipo. También cobra relevancia la promoción de actitudes y valores como la honestidad, la tolerancia y solidaridad.

Desde una perspectiva ideal se considera necesario un seguimiento continuo de los progresos de los alumnos, un ponerse a su lado para observar la forma en que trabajan, para reconocer sus éxitos y corregir sus errores y, así estimular su desarrollo de manera inmediata.

Dentro de un contexto de apreciación, la evaluación más que ser un filtro o una limitante para el avance de los estudiantes, debe ser vista como un elemento que forma parte del aprendizaje, al dedicar un espacio para integrar los conocimientos y reflexionar sobre lo aprendido.

Secuencia de unidades por semestre

	MATEMÁTICAS I	MATEMÁTICAS II	MATEMÁTICAS III	MATEMÁTICAS IV
UNIDAD 1	30 horas El significado de los números y sus operaciones básicas.	15 horas Ecuaciones cuadráticas.	15 horas Elementos de trigonometría.	25 horas Funciones polinomiales.
UNIDAD 2	15 horas Variación directamente proporcional y funciones lineales.	15 horas Funciones cuadráticas y aplicaciones.	10 horas Elementos básicos de geometría analítica.	15 horas Funciones racionales y funciones con radicales.
UNIDAD 3	15 horas Ecuaciones de primer grado con una incógnita.	25 horas Elementos básicos de geometría plana.	20 horas La recta y su ecuación cartesiana.	20 horas Funciones exponenciales y logaritmicas.
UNIDAD 4	20 horas Sistemas de ecuaciones lineales.	25 horas Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.	15 horas La parábola y su ecuación cartesiana.	20 horas Funciones trigonométricas.
UNIDAD 5			20 horas La circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas.	

índice

Mapa de conocimientos por ejes temáticos[2]

Líneas Temáticas	1er. Semestre	2o. Semestre	3er. Semestre	4to. Semestre
Eje 1: Álgebra Ecuaciones con una o más incógnitas, procedimientos algebraicos diversos, formas de estudio a través de las representaciones algebraicas.	• El significado de los números y sus operaciones básicas. • Ecuaciones de primer grado con una incógnita. • Sistemas de ecuaciones lineales.	• Ecuaciones Cuadráticas. • Uso de procedimientos algebraicos en la unidad de funciones cuadráticas. • Uso de procedimientos algebraicos en la parte de aplicación de geometría.	• Manejo del álgebra para pasar de una forma a otra; solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, localización de las intersecciones con los ejes o bien entre cónicas. • Se amplía la visión de lo que es una ecuación, un sistema y el sentido del álgebra misma.	• Amplio manejo algebraico para manipular funciones. • Solución de ecuaciones de grado mayor a dos se incorpora en funciones polinomiales. • Acercamiento a intervalos y desigualdades. • Repaso y extensión de la noción de exponente.
Eje 2: Geometría Euclidiana. Exploración de figuras geométricas, trazos con regla y compás, razonamiento reflexivo, método deductivo, congruencia, semejanza, teorema de Pitágoras y aplicaciones.	• La proporcionalidad directa, como un inicio para entender el concepto de semejanza. • En problemas de variación proporcional, ecuaciones y sistemas de ecuaciones.	• Elementos Básicos de Geometría Plana. • Congruencia, Semejanzas y Teorema de Pitágoras.	• Elementos de Trigonometría • Se retoman muchos conceptos geométricos (ángulo, segmento, área, mediatriz, mediana, paralelas, etcétera) para resolver problemas de corte euclidiano. • Se propone una construcción de cada cónica. • Se utiliza el concepto de tangente, para el ángulo de inclinación de una recta y para el ángulo entre dos rectas.	• En las funciones trigonométricas se retoman y utilizan el teorema de Pitágoras, el concepto de semejanza, y la noción de ángulo y su medida. • En funciones polinomiales y racionales al construir gráficas para resolver problemas geométricos.

[2] En este cuadro se sintetizan los aspectos relevantes que se trabajan curso a curso en los cuatro ejes temáticos. Los elementos escritos en mayúsculas son los nombres de las unidades, mientras que con minúsculas se nombran aquellos contenidos que sirven de base, se retoman o utilizan en unidades relativas a otros ejes.

Mapa de conocimientos por ejes temáticos (continuación)

Líneas Temáticas	1er. Semestre	2o. Semestre	3er. Semestre	4to. Semestre
Eje 3: Geometría Analítica Sistema de coordenadas. Plano Cartesiano. Estudio analítico de problemas de corte euclidiano y de lugares geométricos	• Manejo del Plano Cartesiano. • Primer acercamiento al estudio de la relación entre gráfica y expresión algebraica a través de sus parámetros. • Bases para el concepto de pendiente y relación de paralelismo. • Resolución de sistemas de ecuaciones lineales	• Se trabaja la parábola vertical en dos formas: $y = ax^2 + bx + c$ $y = a(x - h)^2 + k$ • Se refuerza el estudio gráfica-parámetro. • Noción de simetría.	• Elementos básicos de geometría analítica. • La recta y su ecuación cartesiana. • La parábola y su Ecuación cartesiana. • La circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas.	• Se sigue trabajando el plano cartesiano, la relación gráfica-parámetro, simetrías, traslaciones y reflexiones. • En las funciones racionales se grafican y analizan algunas hipérbolas, aunque no con la definición de éstas como cónicas.
Eje 4: Funciones Concepto de función y sus elementos. Diversos tipos de varia-ción, estudio de sus comportamientos. Relación parámetro-gráfica-variación. Vinculación ecuación y función. Gama amplia de aplicaciones..	• Variación directamente Proporcional y funciones Lineales.	• Funciones cuadráticas y aplicaciones. (incluye mención de los números complejos.	• Manejo amplio del plano cartesiano a través de Geometría Analítica. • Uso de las cónicas como ejemplo de relaciones no funciones.	• Funciones polinomiales. • Funciones racionales y con radicales. • Funciones exponenciales y logarítmicas • Funciones trigonométricas

MATEMÁTICAS I

Ubicación del curso

El curso de Matemáticas I está enfocado principalmente a la revisión y estudio de los conceptos básicos de aritmética y álgebra, como: los números y su significado; la ecuación de primer grado con una incógnita; sistema de ecuaciones lineales y sus procedimientos de solución; el tratamiento algebraico de la variación directamente proporcional y función lineal. Conceptos que serán profundizados y extendidos en los tres siguientes cursos del tronco común, sin descuidar la perspectiva de que éstos sirven de sustento y están relacionados con conceptos y procedimientos de los otros ejes temáticos. No se trata de incluir contenidos de estos temas por sí mismos, sino en función de una metodología propia y de la relación que éstos guardan con otras ramas de la Matemática.

La experiencia de los docentes sobre el conocimiento algebraico de los alumnos de nuevo ingreso, indica un deficiente manejo de los procedimientos de solución de ecuaciones y una, aún más pronunciada deficiencia, en la modelación algebraica de situaciones problemáticas en contextos concretos y matemáticos.

Esta misma experiencia apunta como fuente de estas deficiencias, un aprendizaje memorístico de reglas y significados sin sentido y un pobre desarrollo de la capacidad de análisis–síntesis, lo cual trae como consecuencia el que muchos de estos alumnos, al enfrentarse a la interpretación de expresiones algebraicas y a situaciones problemáticas con contenido potencialmente real, acudan a las interpretaciones aritméticas o recursos numéricos rudimentarios muchas veces fallidos.

En suma, el tránsito de la Aritmética al Álgebra no ha sido logrado en los niveles escolares anteriores. Esto tiene dos razones: un deficiente manejo del lenguaje aritmético y la no comprensión de la complejidad cognitiva que representa este tránsito.

Es así que en el curso se incluye una primera unidad centrada en dar sentido a los diferentes tipos de números; sus operaciones básicas y a la creación de sus referentes concretos en una actividad de resolución aritmética de problemas con estrategias que ayuden al desarrollo de la capacidad de análisis–síntesis, hasta llegar a la expresión algebraica de procedimientos generales de cálculo (obtención de fórmulas), recreando así un primer acercamiento al lenguaje algebraico.

En la unidad 2, se inicia el estudio del concepto de función y problemáticas asociadas a él. El concepto de variación permite el estudio de las funciones y el manejo del plano cartesiano, entretejiéndolos con la búsqueda de representaciones (algebraica, tabular y gráfica) para estudiar diversas situaciones que involucran cambio. La construcción de modelos de variación, se asocia con habilidades para explorar y visualizar patrones numéricos, gráficos o simbólicos y construir representaciones de funciones. Con relación a la recreación del lenguaje algebraico, la temática permite avanzar en su comprensión al introducir el significado de la literal como cantidad varia-

ble y la representación algebraica de la relación de dependencia entre dos variables.

En las unidades 3 y 4, se avanza en el significado de las expresiones algebraicas y su estatus como sistema de signos mediadores del pensamiento en la actividad de resolución de problemas. Es importante que se comprenda la riqueza de la estrategia algebraica que permite, al alumno, establecer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas, así como modelar diferentes situaciones y hacer las interpretaciones de las representaciones matemáticas a diversos contextos. Más que la repetición interminable de ejercicios que aparentan responder a un desglose exhaustivo de casos, se pretende que analice la estructura básica de ellos y vea cómo pasar de una situación nueva a otra que ya conoce.

La resolución de problemas como estrategia fundamental de aprendizaje permite revisar los contenidos a través de problemas de diversa índole, dando contextos de aplicación y referentes que facilitan la compresión de los aprendizajes propuestos en las unidades del curso. Así también, esta estrategia es importante para enfocar actividades propias de las matemáticas y modelar fenómenos del mundo real, con ello se crean excelentes oportunidades para que los estudiantes puedan extraer conjeturas, reflexiones, generalizaciones y construir un entendimiento firme en matemáticas.

Propósitos del curso

Al finalizar el primer curso de Matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Conocerá y manejará algunas estrategias para la resolución de problemas.
- Dará significado a los algoritmos de las operaciones básicas y el manejo de la jerarquía de las operaciones.
- Logrará el tránsito de la aritmética al álgebra.
- Reconocerá que la resolución algebraica de ecuaciones involucra un proceso que permite reducir una ecuación dada a otra más simple, hasta alcanzar una forma estándar.
- Desarrollará su capacidad de transitar por distintos registros de representación: verbal, tabular, algebraico y gráfico.
- Resolverá problemas que dan lugar a una ecuación de primer grado con una incógnita, o un sistema de ecuaciones lineales.
- Utilizará las representaciones algebraica, gráfica y tabular para estudiar fenómenos que involucran variación directamente proporcional y de tipo lineal.
- Utilizará las representaciones algebraica y gráfica para modelar situaciones con ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones.
- Será capaz de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales.
- Reconocerá cuando un sistema de ecuaciones es consistente o inconsistente.

Contenidos temáticos
Matemáticas I

Unidad	Nombre de la unidad	Horas
1	El Significado de los números y sus operaciones básicas.	30
2	Variación directamente proporcional y funciones lineales.	15
3	Ecuaciones de primer grado con una incógnita.	15
4	Sistemas de ecuaciones lineales.	20

índice

Matemáticas I
Unidad 1. El significado de los números y sus operaciones básicas

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.	Tiempo: 30 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas.
Significado de los números reales y su simbolización		
Comprende el significado de los números reales.	Significado de los números racionales $\mathbb{Q}$ (enteros $\mathbb{Z}$ y no enteros) e irracionales $\mathbb{I}$.	• El profesor plantee a discusión con el grupo el significado de un número, como expresión de la medida de una magnitud a través de haber determinado una unidad (no se trata de exponer el significado puramente matemático de lo que es un número sino a través de algunos de sus significados concretos). • Para ello, el profesor puede plantear actividades de medición, por ejemplo: *a)* La unidad cabe un número exacto de veces en la magnitud por medir (número natural). *b)* La unidad no cabe un número exacto de veces, pero sí una subunidad (número racional en sus diferentes representaciones). *c)* La unidad no cabe un número exacto de veces ni tampoco cualquier subunidad (número irracional). • Para el significado de los números negativos, el profesor plantee la problemática de la medición de la temperatura y en general el de la medición de magnitudes no absolutas que impliquen el establecimiento de un cero relativo.
Usa correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto.	Las diversas simbolizaciones de un número racional y sus equivalencias: fracción (parte de un todo), decimal, porcentaje.	Se sugiere que el profesor plantee a los alumnos problemas en donde intervengan diversas formas de representación de un número racional y aproveche tal situación para discutir las equivalencias.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Compara dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.	• La comparación entre cantidades (relación de orden) empleando las diferentes simbolizaciones. • Fracciones equivalentes.	• La principal dificultad del alumno es el uso de la representación: $\frac{p}{q}$ *con* $q \neq 0$ para comparar dos cantidades. Por ello se sugiere que el profesor plantee problemas que impliquen la comparación entre este tipo de representaciones con igual denominador, para después plantear la comparación entre fracciones con distinto denominador sugiriendo el uso de la estrategia de reducir un problema nuevo a uno que ya se sabe resolver, esto ofrece una oportunidad para la revisión del concepto de fracciones equivalentes.
Operaciones con números racionales		
Opera correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.	• Algoritmos de las operaciones entre números enteros y racionales: suma, resta, multiplicación, división, y las condiciones para su ejecución. • $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ • El mínimo común múltiplo (mcm) y la regla: • $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\left(\frac{mcm(b,d)}{b}\right)+c\left(\frac{mcm(b,d)}{d}\right)}{mcm(b,d)}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$ • $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ • El Máximo Común Divisor (MCD) y la simplificación de resultados.	En este tema las principales dificultades de los alumnos están en la operatividad con números expresados como: $\frac{p}{q}$ *con* $q \neq 0$ y los números con signo. • Por ello se sugiere que inicie el profesor con problemas que impliquen números positivos. • Para el caso de suma y resta con números en la forma: $\frac{p}{q}$ *con* $q \neq 0$ el profesor plantee, para su discusión, problemas que impliquen cantidades con igual denominador para después plantear problemas con cantidades de distinto denominador, sugiriendo la estrategia de reducir el caso nuevo al que ya se sabe resolver, esto brinda la oportunidad de repasar el concepto de fracciones equivalentes y la forma de obtenerlas. Una vez obtenidas las reglas: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ y $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ hacer ver a los alumnos que el común denominador de las fracciones equivalentes obtenidas, no es otra cosa que un común múltiplo de *b* y *d* y sugiere emplear mcm (*b*, *d*) en la obtención de la regla.

<table>
<tr><th>Aprendizajes</th><th>Temática</th><th>Estrategias sugeridas</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>• En el caso de multiplicación, el profesor plantee un problema de cálculo de área y sugiere el uso de un diagrama para dirigir el descubrimiento de la regla. Posteriormente propone otros problemas con distinto contexto dirigiendo la reflexión sobre si tal forma de operar depende del contexto o no.
• Para el caso de la división, el profesor dirige el descubrimiento de la regla durante la discusión de la resolución de problemas del siguiente tipo: problemas de medición: dadas dos fracciones referentes a la misma unidad, medir una de ellas tomando como unidad la otra, primero cuando ambas tengan el mismo denominador y, posteriormente, con distinto denominador empleando la estrategia de reducir el problema nuevo al que ya se sabe resolver empleando el concepto de fracciones equivalentes. Para resolver el caso del mismo denominador el profesor sugiere el empleo de la estrategia utilizando un diagrama.
• A lo anterior debe seguir la ejercitación, esto debe ser aprovechado por el profesor, para revisar el concepto de MCD, al sugerir que los resultados se simplifiquen a su expresión donde el numerador y el denominador ya no tengan factores comunes distintos de 1.
• Para el caso de la operatividad, con los números con signo, dado que tales reglas responden a la necesidades teóricas cuya discusión, está fuera del alcance del nivel y del tiempo, se sugiere que el profesor las presente y plantee a los alumnos, para ejecución individual dirigida por él, actividades de ejercitación y de discernimiento si tal o cual proceso es correcto o no.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Potencias y radicales</td></tr>
<tr><td>Opera correctamente con potencias y radicales con la misma base.</td><td>Operaciones con potencias: exponentes positivos, negativos y fraccionarios.</td><td>El profesor utilice la multiplicación repetida para obtener las leyes de los exponentes con potencias enteras de la misma base. A partir de lo anterior generalizar para los exponentes racionales. Para corroborar la generalización, el profesor propone a sus estudiantes que realicen algunos cálculos mediante la calculadora o un software.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Significado contextual de las operaciones</td></tr>
<tr><td>Traduce, relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.</td><td>• Significado contextual de las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
• Relaciones entre partes de una cantidad y la cantidad.
• Relaciones entre partes de una cantidad (medir una parte tomando como unidad la otra, etcétera).</td><td>• Es conveniente que el profesor plantee a sus alumnos problemas que impliquen una sola operación con números en sus distintas representaciones y posteriormente una secuencia de operaciones.
• Lo anterior en una dinámica en que ellos primeramente tengan una participación individual y, posteriormente, la discusión de su solución se lleve a cabo en equipos y grupalmente.</td></tr>
</table>

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
	• Relaciones de área. • Relaciones entre porcentajes: el porcentaje de una cantidad; el porcentaje de un porcentaje y su relación con el total; relación porcentual entre una parte y el total; dada la cantidad que representa un porcentaje encontrar el total. • Relación de dos magnitudes de distinta clase que varían conjuntamente. Por ejemplo: relaciones entre distancia velocidad y tiempo; distancia, eficiencia en kilometraje por litro de combustible y volumen de combustible; masa, densidad y volumen; fuerza, área y presión.	• El profesor coordine la actividad sugiriendo estrategias de representación de las relaciones mediante un diagrama para que ellos reflexionen sobre su conexión con las operaciones en el terreno puramente numérico. Por ejemplo, se plantee problemas como encontrar el tiempo que emplea un móvil en recorrer una distancia dada desplazándose a una velocidad constante, y aprovechar una estrategia muy socorrida por los alumnos de ir viendo el desplazamiento, hora por hora, hasta cubrir la distancia dada, y sugerir visualizar esto mediante un diagrama guiando la conclusión de lo que se hace es ver "cuántas" veces cabe la cantidad de velocidad en la distancia dada, lo cual es equivalente a realizar una división entre números.
Resuelve problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.	Aplicación de estrategias heurísticas en la resolución aritmética de problemas con más de una operación.	• Dado que una estrategia muy común al resolver problemas es ver la posibilidad de incluir el problema en uno ya conocido, lo cual implica habilidad para generalizar estructuras, es conveniente que el profesor primeramente plantee a sus alumnos una serie de problemas que se puedan clasificar en varios tipos y pida la ejecución de la tarea primeramente en forma individual y, posteriormente, en equipos y grupal. Posteriormente sugerir, en la resolución de los problemas, el empleo de estrategias como la representación de condiciones mediante un diagrama y su manipulación, buscar problemas ya resueltos con la misma estructura de relaciones, buscar patrones a través de casos particulares o extremos, y pensar hacia atrás, método de análisis– síntesis. • Es importante en la etapa de retrospección plantear actividades que impliquen la inversión de procesos, de generalización de los métodos, así como buscar métodos alternativos de solución. • Se sugiere que el profesor plantee a sus alumnos una serie de problemas que consistan en expresar simbólicamente generalizaciones.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Patrones y fórmulas		
Reconoce patrones numéricos y geométricos en situaciones problemáticas y modelará su comportamiento.	Expresión simbólica de la generalidad (la obtención de fórmulas).	• Se sugiere que el profesor plantee a sus alumnos una serie de problemas que consistan en expresar simbólicamente generalizaciones, primero para ejecución individual y posteriormente por equipos y grupal, donde él proporcione ayuda como el sugerir el empleo de estrategias heurísticas como generalización a través de casos particulares, el empleo de diagramas, la reducción de un caso nuevo a un caso ya resuelto, etcétera. • Estos problemas podrían ser: números triangulares, cuadrangulares, número de diagonales de un polígono convexo, la suma de los ángulos internos de un polígono, la suma de los primeros números enteros consecutivos, la expresión de un entero como suma de números enteros consecutivos, el capital acumulado en una inversión a interés compuesto anual, el número de pasos para resolver el juego de la torre de Hanoi, entre otros.

Unidad 2. Variación directamente proporcional y funciones lineales

Propósito: Al finalizar, el alumno: Modelará y analizará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.	Tiempo: 15 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas.
Identifica situaciones donde existe variación entre dos magnitudes.	El concepto de variación entre dos magnitudes.	El profesor plantee, para su discusión individual y posterior por equipos y grupal, la identificación de situaciones que impliquen o no variación entre dos magnitudes, solicitando a los alumnos argumenten sus respuestas.
Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identifica los elementos que corresponden a los conceptos de variable dependiente e independiente, la razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.	• Variables independiente y dependiente. • Razón de cambio entre dos variables correlacionadas.	Ante situaciones de variación, el profesor plantee y guía la discusión de las respuestas a preguntas como: *a*) ¿la variación de una de las variables depende de la variación de otra?, proponer los nombres de variable dependiente y variable independiente respectivamente; *b*) ¿qué indicador aritmético sirve para describir en qué momentos la variación es más rápida o menos rápida?, proponiendo el nombre de “razón de cambio” para este indicador. En el análisis de las situaciones planteadas el profesor sugiere el uso de *software*.
Variación directamente proporcional		
Traduce en una tabla de valores algunos “estados” correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.	• Representación tabular de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes. • El patrón aditivo en una variación directamente proporcional.	El profesor plantee al alumno trabajo individual y su posterior discusión por equipo y grupal: • La elaboración de registros que permitan a un comerciante consultar el cobro por una mercancía, proponiendo que el registro se haga por intervalos de igual longitud. • Las distancias recorridas por un móvil que se desplaza a velocidad constante, cuando el tiempo aumente en intervalos fijos. • Otras situaciones similares. Después de este trabajo con los alumnos, el profesor mencione que las variaciones que siguen este patrón, reciben el nombre de “Variación directamente proporcional”.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
	Sistema cartesiano	
Traduce en una gráfica, la descripción tabular o verbal de la variación relacionada (directamente proporcional) entre dos cantidades y usa esta representación para obtener información sobre la variación.	• El punto como representación de "estados" específicos de la variación. • Convenciones sobre las escalas. • El patrón gráfico de una variación directamente proporcional. **Análisis contextual de la representación gráfica:** • Interpretación de los puntos del patrón gráfico como estados de la variación no registrados en una representación tabular. • El punto en el origen y la inclinación del gráfico como indicadores esenciales de una variación directamente proporcional.	• El profesor propone la representación geométrica, en un sistema cartesiano, de la información en una tabla sobre una variación directamente proporcional (que pueden ser los casos tratados anteriormente), monitoreando la comprensión entre sus alumnos con actividades individuales de graficación, discute la convención sobre las escalas según el rango de los datos y, pedir a sus alumnos dibujar el gráfico en que parece están contenidos los datos graficados. Aquí él puede utilizar el recurso de un *software* para graficar. • Una vez obtenido el patrón gráfico, el profesor plantee a los alumnos (primero en un trabajo individual y, posteriormente, en trabajo por equipos y grupal), la interpretación de cualquier punto del gráfico pidiendo la justificación de las respuestas a través de un análisis aritmético que puede ser la aplicación de la regla de tres. • El profesor plantee dos problemas de variación con el mismo contexto y preguntar a sus alumnos sobre el indicador geométrico que identifique el caso de variación "más rápida".
Representa algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtener a partir de ella información sobre ésta.	**Expresión simbólica de la generalidad** • $y=ax$ como representación de una variación directamente proporcional. • **Análisis contextual de la expresión simbólica:** $y=ax$ El parámetro *a* como la rapidez de variación o razón de cambio. El parámetro *a* como indicador de la inclinación del gráfico de la variación. La constancia de *a* en una variación directamente proporcional.	Por lo general los alumnos de primer ingreso se dan cuenta de la existencia de un patrón "aditivo" en una variación directamente proporcional: $y = a+a+a+\ldots+a$, x veces (x discreto). Esto puede ser aprovechado para que el profesor guíe la obtención de la expresión $y=ax$ y por despeje, la expresión: $\frac{y}{x} = a$, para x distinto de 0 identificando a este cociente como la rapidez de cambio, planteando para discusión: si este comportamiento sigue siendo válido para cualquier valor de x. Aquí el profesor sugiere el uso de un *software* para graficar y concluir que en una variación directamente proporcional la rapidez de variación es constante y su interpretación, en la gráfica, como indicador de la inclinación.
	Función lineal	
Identifica entre una serie de variaciones entre dos aquellas que correspondan al concepto de función lineal.	El concepto de función lineal.	• El profesor plantea a sus alumnos problemas como: el llenado de recipientes regulares con un flujo constante; la distancia recorrida por un automóvil que se mueve a velocidad constante cuando se empieza a registrar su movimiento después de haber recorrido una cierta distancia del punto de referencia; costo de producción de artículos con la consideración de costos fijos, etcétera.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• Planteando preguntas como: ¿cuál es el valor de la variable dependiente correspondiente al iniciar la variación?, ¿cuál es la rapidez de cambio o rapidez de variación para varios intervalos de variación de la variable independiente?, ¿esta rapidez es constante o variable?, dejando que el alumno busque las respuestas empleando las representaciones que él decida. Finalmente, el profesor emplee las caracterizaciones correctas para clasificar estas variaciones bajo el nombre de "función lineal". El profesor plantea actividades de identificación de variaciones entre dos variables como funciones lineales o no lineales.
Modela con la expresión $y=mx+b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial (0, *b*). Transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.	Representación analítica de una función lineal.	Para aquellos alumnos que no son capaces de emplear directamente el modelo algebraico, el profesor sugiere la exploración a través de las representaciones tabular y gráfica para la obtención analítica.
Análisis algebraico y gráfico de una función lineal		
Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno calcule estados específicos de la variación, su rapidez de cambio y estado inicial, empleando sus representaciones gráfica y analítica.	Identificación de los elementos definitorios de una función lineal empleando las representaciones gráficas y analíticas: • Condición inicial. • Rapidez de variación.	• Ante situaciones de variación lineal, el profesor plantee actividades de cálculo de estados específicos de la variación, cálculo de la condición inicial y rapidez de variación empleando el concepto de rapidez de variación como el cociente del incremento de la variable dependiente entre el correspondiente incremento de la variable independiente, usando las representaciones gráfica y analítica. • Si las condiciones materiales lo permiten, el profesor propone el uso de *software* dinámico para indagar la relación entre los parámetros de la expresión analítica con los geométricos de su representación gráfica y así posibilitar la determinación directa de la condición inicial y rapidez de variación promedio, a través de los parámetros de la expresión analítica. • En este nivel del aprendizaje el profesor plantee actividades para obtener la expresión algebraica, dada la representación gráfica y viceversa.

Unidad 3. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, esto lo hará manipulando algebraicamente el modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.	Tiempo: 15 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas.
El lenguaje algebraico como representación de la generalidad		
Comprende el concepto de “ecuación” en el contexto de la resolución de problemas y lo expresa en el lenguaje algebraico.	• La ecuación como la condición simbólica que debe satisfacer la incógnita en un problema. • El uso del paréntesis en la representación algebraica.	• El profesor plantea a los alumnos que expresen verbalmente, los pasos que se siguen para resolver por tanteo un problema (por ejemplo dos móviles que se siguen o marchan a su encuentro, con tiempo igual o diferido, entre otros.). Posteriormente, pedirles que estos pasos sean simbolizados. • En la consecución de tal tarea el profesor sugiere la estrategia de analizar casos concretos y buscar el patrón general. También esto puede ser aprovechado para introducir el uso del paréntesis.
	La ecuación como la expresión simbólica de un estado específico de una función lineal.	Dado un problema que se modele con una función lineal el profesor plantee el problema de encontrar el valor de la variable independiente que produce un valor dado para la variable dependiente.
El álgebra como sistema simbólico y abstracto que se utiliza para la resolución de problemas		
Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita en un problema, el alumno la utiliza para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.	• Reducción de una ecuación de primer grado con una incógnita a la forma: $ax + b = 0$. • El concepto de ecuaciones equivalentes.	Dadas dos ecuaciones algebraicas equivalentes, se propone que el profesor someta a discusión el encontrar sus soluciones. Para ello sugiere la construcción de tablas y dirige la conclusión de que ambas ecuaciones tienen la misma solución. Empleando esta característica como la propiedad que las clasifica como ecuaciones equivalentes.
	• Las reglas algebraicas que producen ecuaciones equivalentes: - Las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad y las condiciones para su aplicación. - La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.	• Se sugiere que el profesor, a través de ecuaciones convenientes, observe el uso que hacen sus alumnos de las reglas de transformación de una ecuación de primer grado con una incógnita y corregir sus errores empleando alguna estrategia didáctica conveniente (no se trata de repetir el proceso tradicional). A esto debe seguir la ejercitación de la aplicación de las reglas de transformación.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
	• Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita transformándola a la forma $ax + b = 0$	• Comprendido lo anterior, para determinar la solución de los problemas que se modelen con una ecuación de primer grado, el profesor propone a sus alumnos el "reto" de transformar la ecuación obtenida a la forma $ax + b = 0$, utilizando las reglas que producen ecuaciones equivalentes. En dichas transformaciones es importante que el profesor muestre en cada paso que las ecuaciones obtenidas tienen la misma solución.

Unidad 4. Sistemas de ecuaciones lineales

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de tales situaciones.	Tiempo: 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		**Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas.**
Sistemas de ecuaciones lineales 2x2		
Ante un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables, el alumno comprende que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición.	Soluciones de una ecuación lineal con dos variables.	El profesor plantee problemas que conduzcan a una ecuación lineal con dos variables y guiar su modelación algebraica, para posteriormente proponer que encuentre soluciones.
	Representación tabular de las soluciones a un problema con dos variables que satisfacen una sola condición.	El profesor propone a sus alumnos el registro de las soluciones en una tabla, centrando la atención sobre la manera de obtener el valor de una de las variables a partir de los valores de la otra.
Grafica las soluciones a un problema con dos variables e identifica el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las soluciones y su utilidad.	Exploración gráfica de las soluciones a un problema con dos variables que deben satisfacer una sola condición.	El profesor plantea la representación en un sistema de coordenadas cartesianas de las soluciones a un problema con dos variables previamente registradas en una tabla, y posteriormente promover la discusión si esta graficación parece responder a un patrón y si éste es útil para encontrar otras soluciones no registradas en las tablas.
Expresa algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.	Las coordenadas: $\left(x, \frac{c - ax}{b}\right)$ ó $\left(\frac{c - by}{a}, y\right)$ como la expresión general de los puntos que pertenecen a la recta que representa las soluciones de un problema que lleva a una ecuación lineal con dos variables y que se reduce a la forma: $ax + by = c$	El profesor plantea la discusión de cómo se representa cualquier punto del plano cartesiano y, posteriormente, cómo se representa cualquier punto que pertenezca a la recta representante de las soluciones a un problema que lleva a una ecuación lineal con dos variables.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con el conocimiento anterior, el alumno resuelve gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.	Solución gráfica de un problema con dos variables y dos condiciones que potencialmente se puedan representar con ecuaciones lineales con dos variables.	El profesor plantea una serie de problemas que potencialmente lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables y sugerir su análisis y resolución a través del método gráfico utilizando la estrategia heurística de tratar cada una de las condiciones por separado, sometiendo a discusión la interpretación del punto de intersección de las dos gráficas obtenidas.
Solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables por los métodos de:		
Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	Igualación.	• El profesor retome los problemas antes planteados y guíe la representación algebraica de las condiciones que deben satisfacer las incógnitas y los datos. A partir de lo anterior, pedir que exploren la solución, bosquejando el método gráfico usando lápiz y papel. • Una vez realizado el anterior trabajo, y conociendo ellos que la solución se obtiene a través de las coordenadas del punto de intersección, el profesor sugiere la búsqueda de la representación algebraica de los puntos que representan soluciones para cada una de las condiciones: $$\left(x,\ \frac{c_1 - a_1x}{b_1}\right) \text{ y } \left(x,\ \frac{c_2 - a_2x}{b_2}\right)$$ sometiendo a discusión sobre cuál es la condición para que estas dos formas generales representen al mismo punto. Esto con la pretensión de que los alumnos arriben al método algebraico de igualación.
	Sustitución.	• El profesor revisa cuándo se dice que una pareja de valores es solución de una ecuación. • El profesor plantea la búsqueda de otro método de solución partiendo de la representación algebraica de las dos condiciones de los problemas tratados: $a_1x+b_1yc_1$, $a_2x+b_2y=c_2$ y sugerir el encontrar la representación algebraica de los puntos que representan las soluciones, por ejemplo de la primera condición: $$\left(x,\ \frac{c_1 - a_1x}{b_1}\right)$$ y someter a discusión la condición que debe satisfacer esta forma para también ser solución de la segunda condición. Esto con la pretensión de que los alumnos arriben al método algebraico de sustitución.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Sistemas de ecuaciones lineales 3x3		
Comprende el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales en el caso de sistemas lineales 3x3.	Sistemas equivalentes de ecuaciones.	• El profesor proporcione un sistema de ecuaciones lineales 3x3, cuya solución sea dada. • Posteriormente, propone a sus alumnos sustituir una de las ecuaciones por la suma o resta con otra de ellas o sustituir una de ellas por su multiplicación por un escalar y preguntar si la solución dada también es del nuevo sistema. El profesor después de la respuesta correcta propone llamar a los dos sistemas obtenidos de esta forma, como sistemas equivalentes de ecuaciones.
Obtiene sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.	El método de suma o resta y la multiplicación de una de las ecuaciones por un escalar para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes a partir de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3.	• Para el caso 2x2 el profesor plantea un sistema de ecuaciones y proponer a sus alumnos el sustituir una de las ecuaciones por la suma o resta de las dos ecuaciones y comprobar resolviendo los dos sistemas por los métodos ya conocidos, que los sistemas resultan equivalentes. Lo mismo para el caso de sustituir una de ellas por su multiplicación por un escalar. • Para el caso de sistemas 3x3, el profesor dé a conocer la solución del sistema y pedir la obtención de otros sistemas de ecuaciones, por los procedimientos anteriormente descritos y, solicitar a los alumnos que verifiquen que los sistemas obtenidos son equivalentes.
Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 a través de obtener un sistema triangular equivalente de ecuaciones.	Transformación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 o 3x3 a un sistema triangular equivalente de ecuaciones.	Una vez aprendido los métodos de suma o resta y multiplicación por un escalar para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes, el profesor propone a sus alumnos el “reto” de obtener varios sistemas de ecuaciones equivalentes donde sucesivamente se eliminen variables y utilicen esto para resolver el sistema original. • Es conveniente que el profesor ilustre que los métodos de igualación y sustitución son otros procedimientos, mediante los cuales también se obtienen sistemas de ecuaciones equivalentes.
Resuelve problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.	Problemas de aplicación.	El profesor utilice la metodología de Polya para enfrentar los problemas.

índice

Referencias

Para el alumno

Básica:

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.

Complementaria:

Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Pearson.
García, M. (2005). *Matemáticas I para preuniversitarios.* México: Esfinge.
Klymchuk, S. (2008). *Acertijos con Dinero: desarrollo del razonamiento matemático y pensamiento lateral*. México: Trillas.
Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage.
Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson.

Para el profesor

Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Pearson.
García, M. (2005). *Matemáticas I para preuniversitarios.* México: Esfinge.
Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.
Sergiy, K. (2008). *Acertijos con Dinero*. México: Trillas.
Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage.
Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson.
Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (1ª ed., 9ª reimpresión). México: Trillas.
NCTM, (1970), Colección: *Temas de Matemáticas, Medida*. Número 15. México: Editorial Trillas.

MATEMÁTICAS II

Ubicación del curso

Las unidades que se trabajan en este curso, corresponden a los ejes de álgebra, funciones y Geometría Euclidiana. En la unidad de ecuaciones cuadráticas se revisan conceptos y procedimientos que serán el fundamento en la mayoría de los cursos de matemáticas del Colegio, además de establecer una liga con el tema de funciones cuadráticas al vincularse estrechamente en sus características particulares. El resto del curso está dedicado a temas de geometría euclidiana que mediante el manejo del método deductivo se favorece la argumentación y el razonamiento lógico necesario, tanto en el campo de las matemáticas como en otras disciplinas.

De manera más amplia, la secuencia de aprendizajes correspondientes al estudio de la ecuación y la función cuadrática permite, por un lado, avanzar en el concepto de función al introducir un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría, y, por otro, la relación entre estas unidades enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones.

En el caso de la Geometría Euclidiana, ésta ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo con sus formas, dimensiones y propiedades; contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, explora, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establecen relaciones entre ellas por la vía deductiva, sin llegar a un rigor axiomático propio de estudios más especializados.

Así, las unidades correspondientes al eje de Geometría Euclidiana, contemplan las etapas de exploración, deducción y aplicación, mismas que permiten establecer un equilibrio entre dos tendencias[3] de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato. En consecuencia, en la unidad “Elementos básicos de Geometría plana”, se pretende que el alumno explore, observe patrones de comportamiento, conjeture y comience a argumentar; mientras que en la unidad de “Congruencia, semejanza y teorema de pitágoras”, a partir del conocimiento básico de estos conceptos, se introduce al alumno al razonamiento deductivo y a la comprensión del por qué de las demostraciones.

[3] Una tendencia propone un formalismo axiomático, mientras que la otra no trasciende la presentación mecanicista de hechos geométricos.

índice

Propósitos del curso

Al finalizar el segundo curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Adquiere la capacidad para resolver ecuaciones cuadráticas por diferentes métodos y los aplica en la resolución de problemas.
- Avanza en la comprensión del concepto de función, distingue las diferencias y similitudes entre las funciones lineales y cuadráticas. Modela con estas últimas algunas situaciones de variación cuadrática y de optimización.
- Incrementa su capacidad de resolver problemas, al incorporar estrategias y procedimientos para realizar construcciones geométricas y para comprender o proporcionar argumentos que justifican un enunciado.
- Percibe que existe una estructura en los conocimientos de la Geometría Euclidiana y que ésta estudia figuras y cuerpos presentes en su entorno.
- Identifica relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas o infiere algunas conexiones entre resultados.
- Valora la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico.
- Aplica conceptos, procedimientos y resultados de la Geometría Euclidiana para resolver problemas.
- Hace uso de software para un mejor entendimiento de los temas.

Contenidos temáticos
Matemáticas II

Unidad	Nombre de la unidad	Horas
1	Ecuaciones cuadráticas.	15
2	Funciones cuadráticas y aplicaciones.	15
3	Elementos básicos de geometría plana.	25
4	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.	25

índice

Matemáticas II
Unidad 1. Ecuaciones cuadráticas

Propósito: Al finalizar, el alumno: Resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución. Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.	Tiempo: 15 horas

Aprendizajes	**Temática**	**Estrategias sugeridas**
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.
Analiza las condiciones que se establecen en el enunciado de un problema, y expresa las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación de segundo grado.	Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.	El profesor inicia con un problema de tipo geométrico, numérico, físico u otros que lleven a los alumnos a plantear ecuaciones cuadráticas, con la finalidad de captar el interés por el estudio de la temática.
• Relaciona un problema nuevo con otro que ya sabe resolver. • Interpreta en el contexto del problema, lo que significan las soluciones y elige, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto.	Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma: $x^2=b;\ ax^2=b;\ ax^2+b=c;\ ax^2+b=0$ $a(x+b)^2+c=d;\ (x+b)(x+c)=0$	El profesor resuelve una serie de problemas que lleven a ecuaciones del tipo que se mencionan en la temática. Organizando el trabajo en clase en parejas de alumnos, las resuelvan y compartan sus procedimientos.
Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante los diferentes métodos de solución. Transformando la ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico.	Métodos de solución de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$	El profesor plantea la posibilidad de resolver una ecuación cuadrática completa, transformándola a una de las formas anteriores y guía la forma de hacerlo, aprovechando el momento para hacer una revisión de los productos notables y la inversión de esos procesos.
	a) Factorización.	En la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, es útil plantear ejercicios en los que se tiene un producto de dos binomios igualado a cero y analizar las condiciones en que esto es posible, haciendo notar en cada caso que la dificultad se reduce a resolver una ecuación lineal sencilla. Con el fin de promover la reversibilidad de pensamiento, se sugiere que el profesor plantee determinar una ecuación a partir de sus raíces reales.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
	b) Método de completar un trinomio cuadrado perfecto.	Introduce el método de completar cuadrados con el desarrollo de expresiones cuadráticas de la forma $a(x \pm m)^2 = n$ que lo conduzca a una ecuación que no pueda resolver con los métodos vistos hasta el momento. Por lo que se requiere realizar el proceso inverso de completar cuadrados.
• Generaliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. • Identifica los parámetros a, b, c en una ecuación cuadrática y los sustituye correctamente en la fórmula general.	Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática.	El profesor apoye y oriente al estudiante con actividades de generalización, para que llegue a la obtención de la fórmula general de la ecuación cuadrática.
Identifica la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, a partir de sus coeficientes.	Discriminante b^2-4ac y naturaleza de las raíces.	El profesor plantee ejercicios, que conduzcan a una, dos o ninguna raíz real y pide a los alumnos analicen qué es lo que provoca tales resultados.
Establece el modelo matemático del problema y aplica el método de resolución conveniente.	Problemas de aplicación.	El profesor plantee diversos problemas de aplicación, sugiriendo el uso de ayudas heurísticas convenientes.

índice

Unidad 2. Funciones cuadráticas y aplicaciones

Propósito: Al finalizar, el alumno: Analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica y analítica. Resolverá problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.	Tiempo: 15 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente el trabajo individual, privilegie el trabajo en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.
• Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada. • Reconoce en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. Identifica las diferencias entre variación lineal y cuadrática.	Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.	El profesor inicie con problemas de área, número de diagonales en un polígono de *n* lados, estrechar la mano a un grupo de personas; cuyo modelo matemático resulte ser una función cuadrática. Esto permite que el alumno explore las condiciones, valores, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etcétera, de manera que obtenga información, como un paso previo a establecer la representación algebraica de una función cuadrática. El profesor propone a los estudiantes trabajar en equipo.
Interpreta el comportamiento de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica, dentro del contexto de una situación dada.	Estudio gráfico, analítico y contextual de la función $y=ax^2 + bx + c$, en particular: $y= ax^2$ $y=ax^2+c$ $y=a(x-h)^2+k$	El profesor propone a los alumnos, organizados en equipo, la construcción de gráficas para analizar el comportamiento de los parámetros y posteriormente el alumno confronta mediante un *software* dinámico, lo realizado a lápiz y papel.
Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje *X*, con la naturaleza de las raíces. En particular, identifica su ausencia con la existencia de raíces complejas.	Ceros de la función.	A partir de una función dada, el alumno calcula los valores correspondientes para $f(x)=0$

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Expresa la función $y=ax^2+bx+c$ en la forma estándar $y=a(x-h)2+k$, usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpreta el impacto de sus parámetros en el registro gráfico. • Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.	• La función $y=ax^2+bx+c$ y sus propiedades gráficas. - Simetría, concavidad, máximo o mínimo. • Forma estándar $y=a(x-h)^2+k$	• El profesor cuestiona a los alumnos sobre la simetría de la gráfica de las funciones cuadráticas, y su utilidad para determinar el valor máximo o mínimo y las coordenadas del vértice. • El profesor plantea a sus alumnos la actividad de transformar una función cuadrática a la forma $y=a(x-h)^2+k$ y analizar su utilidad para determinar las características analíticas y gráficas de la función.
Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.	Problemas de aplicación.	El profesor resalta la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización en diversos contextos, por ejemplo, numéricos, de áreas, costos y ganancias.

Unidad 3. Elementos básicos de geometría plana

Propósito: Al finalizar, el alumno: Comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.	Tiempo: 25 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas. El profesor propondrá usar el software de geometría dinámica para que el alumno visualice, descubra y/o conjeture propiedades y características de figuras geométricas.
Conoce el origen de la Geometría Euclidiana y su sistematización.	Bosquejo histórico de la Geometría.	El profesor inicia con una revisión del origen de la Geometría Euclidiana y la forma como se sistematiza este conocimiento.
Describe y reconoce los elementos básicos de una figura geométrica, los expresa en forma verbal y escrita.	Elementos básicos de Geometría Plana: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.	El profesor revise conjuntamente con el grupo, los elementos básicos de la Geometría Plana.
Construcciones con regla y compás		
Comprende mediante la construcción, los conceptos: segmento de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares, mediatriz, ángulo y bisectriz.	• Segmentos. • Ángulos. • Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: - Que pertenece a ella o fuera de ella. • Mediatriz de un segmento. • Bisectriz de un ángulo. • Recta paralela a otra que pasa por un punto dado.	El profesor oriente al alumno a que establezca propiedades y características de figuras geométricas, a través de construcciones con regla y compás.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Ángulos		
Clasifica los ángulos por su medida y su relación con otros.	• Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano). • Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice).	El profesor define los tipos de ángulos y solicita a los alumnos que los identifiquen, en casos concretos.
Conoce e identifica los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.	Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes.	El profesor define los ángulos formados por dos rectas cortadas por una transversal y pide a los alumnos que los identifiquen en figuras concretas.
Concluye que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente.	Postulado de las rectas paralelas y su inverso.	El profesor pide a sus alumnos que usen un *software* dinámico para que verifiquen que en el caso de tener rectas paralelas, los ángulos alternos internos son congruentes. Posteriormente, se les solicita que muestren que los ángulos correspondientes y los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Para el inverso, se propone que el profesor parta de dos rectas no paralelas cortadas por una transversal y utilizando el *software* dinámico, proponga que el alumno modifique la posición de una recta, hasta que los ángulos alternos internos sean congruentes y observe que las rectas resultan paralelas.
Aplica los conceptos anteriores en la resolución de problemas.	Problemas de aplicación.	El profesor propone a discusión la resolución de problemas geométricos, algebraicos y numéricos.
Geometría del triángulo		
Clasifica los triángulos según sus lados y ángulos.	Clasificación de los triángulos por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo).	El profesor propone las definiciones de estas clasificaciones y plantea a sus alumnos actividades de identificación y construcción.
Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.	Desigualdad del triángulo.	El profesor propone ejercicios dando tres segmentos de recta, para que el estudiante construya los triángulos correspondientes y descubra cuando no es posible.
Muestra y justifica las propiedades entre los ángulos de un triángulo:	Propiedades del triángulo: • Suma de los ángulos interiores es igual a 180°. • Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°. • Suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente.	El profesor utiliza material concreto (recorte y doblado de papel), para mostrar alguna propiedad del triángulo. El alumno muestra las otras.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Aplica las propiedades de los ángulos de un triángulo en la resolución de problemas.	Problemas de aplicación.	El profesor propone a discusión la resolución de problemas geométricos, algebraicos y numéricos.
Distingue las características que determinan a las rectas y puntos notables en un triángulo.	• Rectas notables del triángulo: Mediatriz, bisectriz, mediana y altura. • Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro. • Construcción de las rectas y puntos notables.	El profesor define las rectas y puntos notables y solicita a sus alumnos actividades de identificación y construcción argumentando sobre la validez de las construcciones realizadas y las explique de forma oral y escrita. Hace notar a los alumnos, que algunos puntos notables de un triángulo, están alineados.
Determina geométricamente la distancia de un punto a una recta.	Distancia de un punto a una recta.	Dada una recta y un punto fuera de ella, el profesor propone para trabajo grupal, se dibuje el segmento que representa la distancia de ese punto a la recta. Genere la discusión sobre la importancia de la noción de perpendicularidad en este tema.
Justifica y aplica las propiedades del triángulo isósceles.	Propiedades del triángulo isósceles: • Los ángulos adyacentes a la base son iguales. • La altura y la mediana de la base coinciden. • La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.	El profesor utilice material concreto (recorte y doblado de papel), para mostrar alguna propiedad del triángulo isósceles y propone al alumno que muestre las otras. Además, propone problemas donde se apliquen las propiedades del triángulo isósceles. Sugiere al alumno apoyarse en construcciones de figuras que permitan visualizar las propiedades que se quieren demostrar. Esto con la finalidad de establecer vínculos adecuados que favorezcan obtener una argumentación válida. El profesor, durante la discusión, resalta la diferencia entre mostrar y demostrar; así como propiciar que el alumno argumente en forma oral y escrita la validez de los resultados obtenidos.
Polígonos		
Describe los polígonos por sus características (regulares e irregulares).	Polígonos regulares e irregulares.	El profesor propone a los alumnos una investigación sobre los polígonos regulares e irregulares y su clasificación. Posteriormente se plantean actividades de clasificación de diversos polígonos.
Conoce y aplica las propiedades de los polígonos.	Propiedades de los polígonos: Suma de los ángulos interiores. Número de triángulos que se forman al interior del polígono.	El profesor oriente para que el alumno encuentre la expresión general para la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n*–lados, mediante la propiedad de suma de los ángulos interiores de un triángulo.
• Calcula el perímetro y área de un polígono regular. • Calcula el área de un polígono irregular por triangulación.	• Perímetro y área. • Fórmula de Herón.	• El profesor proporcione los recursos trigonométricos necesarios para calcular el perímetro y área de un polígono regular. • El profesor propone al alumno investigar la obtención de áreas de polígonos irregulares utilizando la fórmula de Herón.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Círculo y circunferencia		
• Identifica las líneas notables de la circunferencia. • Localiza el centro de una circunferencia. • Aproxima el perímetro y área del círculo.	• Rectas y segmentos. • Localización del centro de una circunferencia. • Perímetro y área del círculo.	El profesor oriente y conduce al alumno para la obtención aproximada del perímetro y área del círculo, mediante polígonos regulares inscritos, haciendo uso de un *software* dinámico.
Utiliza los conocimientos adquiridos, en la resolución de problemas.	Problemas de aplicación.	El profesor propone problemas de aplicación y sugiere que los alumnos los resuelvan en parejas, aplicando las estrategias sugeridas por Polya.

índice

Unidad 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras

Propósito: Al finalizar, el alumno: Aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.	Tiempo: 25 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente, tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas. El profesor propondrá usar el software de geometría dinámica para que el alumno visualice, descubra y/o conjeture propiedades y características de figuras geométricas. Resaltará la diferencia entre mostrar y demostrar; así como propiciar que el alumno argumente en forma oral y escrita la validez de los resultados obtenidos.
Congruencia		
• Utiliza correctamente la notación propia de la congruencia. • Comprende el concepto de congruencia.	• Notación. • Congruencia.	El profesor plantee actividades donde se vea la necesidad de usar una nomenclatura adecuada, para el entendimiento y comunicación de ideas y conceptos. El profesor define congruencia y pide a los alumnos la identificación de objetos congruentes.
Construye segmentos y ángulos congruentes.	Figuras congruentes.	El profesor guía la construcción de segmentos y ángulos congruentes, usando regla y compás.
Reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.	Congruencia de triángulos.	El profesor propone actividades donde el alumno verifique la congruencia de triángulos haciendo uso de la definición.
Argumenta empíricamente la validez de los criterios de congruencia.	Criterios de congruencia de triángulos. a) LAL. b) LLL. c) ALA.	• El profesor construye un triángulo congruente a otro considerando los elementos mínimos. • Enfatice la identificación de ángulos y lados homólogos para justificar la congruencia de triángulos. • El profesor utilice contraejemplos para refutar enunciados falsos, por ejemplo, LLA.
Argumenta deductivamente la validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones.	Construcciones de: • Bisectriz de un ángulo. • Mediatriz de un segmento. • Perpendicular a una recta. • Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.	• El profesor sugiere el uso de congruencia de triángulos para justificar las construcciones. • Sugiere a sus alumnos, se apoyen en construcciones de figuras que permitan visualizar las propiedades que se quieren demostrar. Esto con la finalidad de establecer vínculos adecuados que favorezcan obtener una argumentación válida.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre lados, ángulos y triángulos. • Resuelve problemas, por medio de los criterios de congruencia.	Problemas de aplicación.	El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas.
Semejanza y teorema de Pitágoras		
• Utiliza correctamente la notación propia de la semejanza. • Comprende el concepto de semejanza.	• Notación. • Semejanza.	El profesor plantea actividades donde se vea la necesidad de usar una nomenclatura adecuada, para el entendimiento y comunicación de ideas y conceptos. El profesor define semejanza y pide a los alumnos la identificación de objetos semejantes.
Reconoce cuándo dos figuras son semejantes.	Figuras semejantes	Introduce al concepto de semejanza mediante los modelos a escala como lo son: mapas, maquetas, planos, fotos, etcétera.
Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.	Semejanza de triángulos.	El profesor propone actividades donde el alumno verifique la semejanza de triángulos haciendo uso de la definición.
Establece como válidos los criterios de semejanza.	Criterios de semejanza de triángulos: • LLL • LAL • AAA	• El profesor construye un triángulo semejante a otro, considerando los elementos mínimos y pida a los alumnos justificar que los triángulos construidos satisfacen la definición de semejanza. • Enfatiza la identificación de ángulos y lados homólogos para justificar la semejanza de triángulos.
Calcula perímetros y áreas en triángulos semejantes y la razón entre ellos.	Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes.	El profesor propone ejercicios de triángulos semejantes, dadas sus razones de semejanza y pide a los alumnos que comparen sus perímetros y áreas y busquen un patrón en los resultados obtenidos.
Aplica los criterios de semejanza en la resolución de problemas.	Problemas de aplicación.	El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas.
Divide un segmento en *n* partes iguales y a partir de esta construcción infiere el Teorema de Thales.	Teorema de Thales y su recíproco.	El profesor oriente al estudiante para que infiera el Teorema de Thales, a partir de dividir un segmento en *n* partes iguales.
Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.	Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.	El profesor hace una demostración del Teorema de Pitágoras y solicita a los alumnos que investiguen otras demostraciones, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos. Además, solicita a los alumnos que construyan triángulos que satisfacen la conclusión del Teorema de Pitágoras y verifiquen que son rectángulos.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de problemas.	Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.	El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas planteados.

Referencias

Para el alumno

Básica:

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage

Álvarez, E. (2012). *Elementos de Geometría*. Colombia: Universidad de Medellín.

Ortiz Campos, F. J. (1991). *Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

Complementaria:

Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México, Pearson.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). *Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones*. México: McGraw Hill, Interamericana

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). *Geometría*. México: Pearson.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) *Geometría*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

García, M. (2005). *Matemáticas I para preuniversitarios*. México: Esfinge.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson.

Para el profesor

Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Pearson.

Álvarez, E. (2012). *Elementos de Geometría*. Colombia: Universidad de Medellín.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). *Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones*. México: McGraw Hill, Interamericana

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). *Geometría*. México: Pearson.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) *Geometría*. México: Grupo Editorial Iberoamericana

García, M. (2005). *Matemáticas I para preuniversitarios*. México: Esfinge.

Larson, R. y Hostetler, R. (2006). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Lozano, C. y Vázquez, A. (2009). *Geometría y trigonometría*. México: Prentice Hall.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.

Ortiz Campos, F. J. (1991). *Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (1˙ed., 9˙reimp. ed.). México: Trillas.

Rees, P. y Sparks, F. (2005). *Álgebra*. México: Reverte.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage

índice

MATEMÁTICAS III

Ubicación del curso

La primera unidad se dedica al estudio de las razones trigonométricas elementales y emplea elementos de geometría plana que se abordaron en las dos últimas unidades en Matemáticas II, ya que a partir del concepto de semejanza de triángulos se obtienen las razones trigonométricas y sus distintas representaciones, como las recíprocas e inversas; también se estudian algunas identidades trigonométricas derivadas del Teorema de Pitágoras y se hace énfasis en la resolución de problemas al aplicar las leyes de senos o cosenos.

En cuanto a la geometría analítica, que abarca la mayor parte del curso, su enfoque se centra en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos que, desde el punto de vista euclidiano sólo admiten formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos.

Es importante que el alumno perciba cómo a través de la introducción de un sistema de coordenadas y del manejo del método analítico, se obtienen procedimientos generales de construcción y análisis; se facilita la deducción de resultados geométricos, ya que esta tarea queda sujeta a las reglas del álgebra, y se favorece y profundiza el estudio del comportamiento de los lugares geométricos al identificar las características de los parámetros que las definen. Todo ello permite extender el campo de aplicaciones de la geometría euclidiana. Aunque una parte importante del método analítico consiste en obtener la forma algebraica que representa a un lugar geométrico, el tratamiento de la temática no se centra en manejar un conjunto de fórmulas, se intenta aprender *estrategias generales* y diversas formas de representación que apoyan la comprensión y facilitan el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema.

Actualmente, existe *software* en diversas versiones (GeoGebra, WinPlot, *Geolab, Cabri, Derive*, entre otros) que favorece, entre otras, la exploración de las características de las cónicas por parte del alumno, el reconocimiento de patrones de comportamiento, la formulación de conjeturas, el establecimiento de relaciones entre la gráfica de una cónica y los parámetros de la ecuación asociada; por lo que es recomendable su uso para enriquecer el estudio de la geometría analítica. Además, pueden usarse videos como el de *Khan Academic*, en *Youtube.*

Propósitos del curso

Al finalizar el tercer curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Adquirirá el conocimiento y la habilidad para manipular las razones trigonométricas y resolverá problemas de triángulos rectángulos y oblicuángulos en diferentes contextos.
- Reconocerá que se incrementan las posibilidades de análisis y aplicación de la Geometría Euclidiana, al incorporar al estudio de los objetos y relaciones geométricas la representación y los procedimientos del álgebra.
- Percibirá a los sistemas de coordenadas como la noción fundamental para realizar el estudio analítico de los lugares geométricos.
- Resolverá problemas de aplicación, donde se usarán distintas expresiones analíticas de las curvas.
- Adquirirá habilidad básica con *software* para graficar expresiones de diferentes cónicas.
- Encontrará los puntos de intersección de diferentes expresiones analíticas.
- Utilizará las propiedades de un lugar geométrico y obtendrá la ecuación que lo representa.

Contenidos temáticos
Matemáticas III

Unidad	**Nombre de la unidad**	**Horas**
1	Elementos de trigonometría.	15
2	Elementos básicos de geometría analítica	10
3	La recta y su ecuación cartesiana	20
4	La parábola y su ecuación cartesiana.	15
5	La circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas	20

Matemáticas III
Unidad 1. Elementos de trigonometría

Propósito: Al finalizar, el alumno: Utilizará las razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores	Tiempo: 15 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.
Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son respectivamente invariantes en triángulos semejantes.	Razones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo.	• El profesor inicia con un breve bosquejo histórico de la trigonometría o propone que los estudiantes elaboren una investigación al respecto. • Se utilicen triángulos rectángulos semejantes, para mostrar que las razones trigonométricas son invariantes.
Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° y emplea la calculadora para verificarlos.	Solución de triángulos rectángulos especiales.	El profesor implemente actividades para que los alumnos obtengan los valores de las razones trigonométricas, para los ángulos de 30°, 45° y 60° con el uso de un triángulo equilátero e isósceles rectángulo.
Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos.	Solución de problemas de aplicación: • Ángulo de elevación. • Ángulo de depresión. • Distancias inaccesibles. • Cálculo de áreas.	El profesor propone problemas o situaciones donde el alumno pueda aplicar la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, en los cuales estén presentes los ángulos de elevación, de depresión o de distancias inaccesibles. Como sugerencia: • Determinar el área de un polígono regular. • Resolver problemas de lugares inaccesibles, por ejemplo: el perímetro de la Tierra, distancia de la Tierra al Sol, el cálculo del diámetro del Sol, etcétera.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas.	Identidades trigonométricas fundamentales: $\tan A = \frac{senA}{\cos A}$ $\cot A = \frac{\cos A}{senA}$ Recíprocas $senA = \frac{1}{\csc A}$ $\cos A = \frac{1}{\sec A}$ $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ Pitagóricas: $sen^2 A + cos^2 A = 1$ $1 + tan^2 A = sec^2 A$ $1 + cot^2 A = csc^2 A$	• El profesor, con la participación de los alumnos, deduce las identidades trigonométricas fundamentales de un triángulo rectángulo. • Para garantizar la retención de tales identidades, el profesor propone ejercicios tipo, que involucren tales identidades.
Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos, para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.	Resolución de triángulos oblicuángulos: • Ley de senos. • Ley de cosenos. • Problemas de aplicación.	El profesor, conjuntamente con los alumnos, deduce las leyes de senos y cosenos y propondrá problemas de aplicación.

Unidad 2. Elementos básicos de geometría analítica

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de manejar algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico.	Tiempo: 10 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas:
El punto en el plano cartesiano		
Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.	Representación de puntos en el plano de coordenadas rectangulares.	Introduce los sistemas de coordenadas a través de problemas, que hagan ver la necesidad de contar con un sistema de referencia para localizar puntos en un plano, por ejemplo en mapas, batalla naval, entre otros.
Segmento rectilíneo en el plano cartesiano		
Localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.	• Condiciones necesarias y suficientes para determinar un segmento: • Los puntos extremos. • Un extremo (punto inicial o final), la longitud y el ángulo de inclinación. Se considera punto inicial el que tiene la menor ordenada.	El profesor plantee a sus alumnos la localización de un segmento a partir de las condiciones, haciendo uso de la regla y transportador.
Obtención analítica de los elementos asociados a un segmento en el plano cartesiano		
Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones.	Longitud de un segmento.	El profesor proporcione ayudas para guiar la obtención de la fórmula que calcule la longitud de un segmento; se sugiere el trazo de algunas líneas.
Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.	Ángulo de inclinación.	• El profesor define el ángulo de inclinación de un segmento para posteriormente plantear a sus alumnos actividades de identificación del concepto, dado un ángulo que el alumno construya un segmento con ese ángulo de inclinación. • El profesor define el concepto de pendiente, y plantea a sus alumnos actividades de cálculo de la pendiente dado el ángulo de inclinación y viceversa, a fin de que el alumno comprenda que la inclinación de un segmento puede darse a través de su ángulo de inclinación o su pendiente.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento.	Pendiente.	El profesor induce la aplicación del conocimiento adquirido en la primera unidad para obtener la fórmula que proporcione el ángulo de inclinación aprovechando esto para definir la pendiente como la tangente del ángulo de inclinación.
Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.	Condiciones necesarias y suficientes para localizar un segmento. • Punto extremo (inicial o final), longitud e inclinación.	El profesor plantea a sus alumnos la discusión sobre qué otras condiciones determinan unívocamente a un segmento y pide que esto sea comprobado, haciendo el ejercicio donde un alumno dé a otro, indicaciones para reproducir un segmento previamente dibujado por él en un referencial.
Localiza los puntos de división de un segmento.	• Puntos especiales de un segmento. • Punto que divide al segmento en una razón dada. • Punto medio.	Dado que el tiempo asignado a la unidad es insuficiente, se sugiere que: • El profesor deduzca las fórmulas e ilustre su aplicación, posteriormente, podrán ejercitarlas los alumnos. • Es conveniente que el profesor plantee actividades inversas como por ejemplo determinar los vértices de un triángulo dados los puntos medios de sus lados.
Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.	Lugares geométricos en el plano cartesiano	Se recomienda que el profesor, proponga a los alumnos la obtención de la expresión algebraica de lugares geométricos sencillos.

Unidad 3. La recta y su ecuación cartesiana

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la recta, dados diversos elementos definitorios. Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico.	Tiempo: 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.
La recta en el plano cartesiano		
• Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen. • Entiende a la pendiente de una recta, como un invariante. • Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.	Ecuación de la recta dados: • Dos puntos. • Un punto y la pendiente. • La pendiente y la ordenada al origen. • Un punto y el ángulo de inclinación.	• El profesor guíe al alumno en la obtención de la ecuación de la recta, a través del concepto de pendiente. • El profesor propone ejercicios para garantizar la comprensión de la representación analítica de la recta, tales como: determinar si un punto pertenece o no a una recta utilizando su ecuación o determinar si tres puntos son colineales. • Plantee como problemas la obtención de más formas de representación de una recta. • Analice en la ecuación $y=mx+b$ el papel que juegan los parámetros. • Se sugiere que el profesor plantee actividades de inversión de razonamiento, esto es, que a partir de una serie de ecuaciones, el alumno identifique aquellas que corresponden a ecuaciones de rectas.
Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.	Ángulo entre dos rectas.	El profesor guíe la obtención de la relación entre el ángulo de corte de dos rectas y los ángulos de inclinación de éstas. La interpretación de la relación anterior de éstas en términos de pendientes y tangentes: $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, $m_1 m_2 \neq -1$ está a cargo del profesor.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones. • Dada la ecuación de una recta el alumno es capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.	Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.	El profesor propone analizar la fórmula para el ángulo entre dos rectas, en los casos en que el ángulo es de 0° y 90°.
Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).	Ecuación de la recta en su forma ordinaria o canónica, general y simétrica.	El profesor propone ejercicios, con las diferentes formas de la recta, para que el alumno pase de una forma de la recta a las demás.
Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.	• Intersección entre dos rectas. • Distancia de una recta a un punto. • Ecuaciones de las rectas notables del triángulo (mediatrices, medianas y alturas).	• El profesor plantea problemas donde se utilice la temática indicada, y sugiere el uso de estrategias pertinentes, por ejemplo: Verifica que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, la determinación de los puntos notables de un triángulo. • Utilice un *software* dinámico para resolver problemas relacionados con la temática. • Problemas en contexto que lleven a la ecuación de una recta: • Plantear problemas que permitan la interpretación de los parámetros de la recta en diversos contextos. • Resolver problemas que se modelen con una ecuación lineal, que permitan hacer predicciones. • Resolver problemas que involucren todos los conceptos vistos en la unidad.

Unidad 4. La parábola y su ecuación cartesiana

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes. Identificará sus elementos a partir de la ecuación. Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades.	Tiempo: 15 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.
• Identifica los elementos que definen la parábola. • Reconoce la simetría de esta curva. • Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico.	• La parábola como lugar geométrico. • Elementos que la determinan: foco, directriz, eje de simetría. • Vértice y lado recto.	• El profesor propone la construcción con material concreto como doblado de papel de un conjunto de puntos que le lleven a bosquejar la curva, y conjuntamente con los alumnos analiza la propiedad común que tienen los puntos generados, con el propósito de llegar a la definición como lugar geométrico. • Aprovechando la construcción, el profesor señale algunos puntos y rectas especiales como vértice y lado recto y le plantee actividades de identificación de tales conceptos en las construcciones individuales.
• Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él. • Entiende que un punto pertenece a una parábola sí y sólo sí, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.	Ecuación de la parábola con eje de simetría sobre uno de los ejes de coordenadas y vértice en el origen.	• El profesor con participación de los alumnos, hace la deducción de la ecuación con vértice en el origen y posteriormente fuera del origen. • El profesor proporcione algunos puntos y pide a los alumnos que verifiquen sí son puntos de la parábola.
Determina el vértice, foco, directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.	Vértice, eje de simetría foco, lado recto de una parábola.	El profesor plantea problemas, donde el alumno encuentre los elementos a partir de su ecuación.
Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.	Representación algebraica y gráfica de una parábola.	El profesor propone ecuaciones de parábolas y el alumno las grafica y presenta el problema inverso con intervención de los alumnos. Se sugiere que se trabaje con *software* dinámico para que el alumno induzca el papel que juegan los parámetros en la gráfica.
Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.	• Ecuación ordinaria de la parábola y la interpretación de sus parámetros. • Ecuación general.	El profesor, a partir de la discusión de lo que representan los elementos de la ecuación ordinaria, le plantea al alumno el problema de encontrar sus elementos, a partir de la forma general.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.	Sistemas de ecuaciones formados por: • Una ecuación lineal y una parábola. • Dos parábolas.	El profesor debe aprovechar la discusión de estos problemas para plantear métodos de solución de sistemas no lineales y pide que el alumno verifique sus soluciones empleando un *software* dinámico.
Resuelve problemas de aplicación.	Resolución de problemas en diversos contextos.	El profesor propone problemas que involucren arcos, puentes o socavones parabólicos para que el alumno determine si cabe un objeto con dimensiones dadas.
Valora su conocimiento sobre parábola.	Aplicaciones prácticas.	El profesor sugiere a sus alumnos que visiten e interactúen con museos como el de la Luz y Universum, entre otros, donde se muestren aplicaciones de la parábola.

Unidad 5. Circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas

Propósito: Al finalizar, el alumno: Será capaz de obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios. Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras.	Tiempo: 20 horas

Aprendizajes	**Temática**	**Estrategias sugeridas**
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.
La Circunferencia		
Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro).	• La circunferencia como lugar geométrico. • Elementos que definen a la circunferencia. • Ecuación ordinaria con centro en el origen y fuera de él.	• Utilizando el dibujo de una circunferencia, el profesor, plantee una discusión para llegar a la definición. Y a partir de tal definición, pide a los alumnos, deducir la ecuación. • A fin de garantizar la comprensión de la representación algebraica, el profesor plantea las coordenadas de varios puntos para verificar si éstos pertenecen o no a una circunferencia.
Obtiene la ecuación general de la circunferencia.	Ecuación General.	El profesor propone ecuaciones de la circunferencia en forma ordinaria, para que el estudiante desarrolle las operaciones indicadas y obtenga la ecuación general e identifique el tipo de términos que la componen.
Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro y el radio de una circunferencia.	Relación entre ecuación ordinaria y ecuación general.	El profesor propone ecuaciones de la circunferencia en forma general, y con su orientación solicita que los alumnos realicen las operaciones pertinentes para obtener la ecuación ordinaria e identifique los elementos de la circunferencia.
Resuelve problemas de corte geométrico.	Problemas de aplicación.	Resuelve problemas, como por ejemplo: Encontrar la ecuación de la tangente a la circunferencia, la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos, la intersección entre recta y circunferencia y en otros contextos.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
La elipse		
• Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos. • Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes cartesianos.	• Definición de la elipse como lugar geométrico • Elementos de la elipse: vértices, focos, ejes mayor y menor, distancia focal y excentricidad, lado recto.	• El profesor propone la construcción de una elipse usando el método del jardinero o con doblado de papel, y guíe el análisis de lo realizado a fin de que se arribe a la definición como lugar geométrico. • Propone las definiciones de otros elementos importantes de la elipse y planteará actividades de identificación. • El profesor oriente la obtención de la ecuación cartesiana en el origen, y la posterior generalización a la ecuación con centro fuera del origen. • Es conveniente que el profesor, para garantizar la comprensión de la ecuación, pide a los alumnos decidir si un conjunto dado de puntos pertenece o no a la elipse dada su ecuación.
Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse.	Simetría con respecto a los ejes y al centro.	El profesor propone actividades donde el alumno reconozca las simetrías de la elipse.
Identifica el papel de los parámetros a, b, c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.	La elipse y los parámetros de su representación algebraica. • Excentricidad.	• El profesor propone ejercicios para bosquejar la elipse a partir de sus parámetros. • El profesor utilice *software* dinámico en el análisis de los parámetros de la elipse para establecer la relación con su gráfica.
Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.	Ecuación general.	El profesor guíe la transformación de la ecuación general de la elipse a su forma ordinaria.
Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.	Intersección de cónicas, trazado de tangentes, propiedades óptica y auditiva.	• El profesor solicite una investigación sobre aplicaciones de la elipse y propone problemas utilizando los resultados obtenidos. • El profesor propone el uso de *software* dinámico para trazar tangentes a la elipse, y establecer sus relaciones.

Referencias

Para el alumno

Básica:

Ayres, F. Jr, *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc graw–Hill / Interamericana de México.

De Oteysa, E. et al. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Fuenlabrada, S. (2000).*Geometría Analítica*. México: Mc graw–Hill.

Hirsch, C. Schoen, H. (1987). *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. Edit Mc graw–Hill.

Holliday, B. et al. (2002). *Geometría Analítica con Trigonometría*. México: Mc graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*, México: Limusa.

Morales, H. y Molina, A. (2002). *Matemáticas III*, México: Trillas.

Rees, P. & Sparks, F. (1984). *Trigonometría*. México: Reverté.

Ruiz, Basto Joaquín (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V.

Swokowski, E. Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

Complementaria:

Ayres, Frank Jr, *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc graw–Hill/ Interamericana de México.

Castañeda de Isla Puga, E. (2000) *Geometría analítica en el espacio*. México: Unam, Facultad de Ingeniería.

Colección “Temas de Matemáticas” editada por la facultad de Ciencias de la Unam.

De Oteysa, E. et al. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica*. México: Mc graw–Hill.

Hirsch, C. y Schoen, H. (1987). *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. México: Mc graw–Hill.

Holliday, B. et al. (2002). *Geometría Analítica con Trigonometría*. México: Mc graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Morales, H. y Molina, A. (2002). *Matemáticas III*. México: Trillas.

Ramírez, A. (2013). *Geometría Analítica, una introducción a la geometría*. México: Unam–Facultad de Ciencias.

Rees, P. & Sparks, F. (1984). *Trigonometría*. México: Reverté.

Ruiz, J. (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

Dirección General de Bibliotecas.

Los libros electrónicos están disponibles en texto completo para toda la comunidad de la unam.

Se sugiere explorar los sitios electrónicos siguientes:

<http://dgb.unam.mx/ >
<http://dgb.unam.mx/ >
<http://www.fciencias.unam.mx/servicios/biblioteca/electronicos>
<http://www.fciencias.unam.mx/servicios/biblioteca/electronicos>

En la página del cch en Internet, alumnos y profesores tienen acceso a diversos materiales. El profesor debe conocer y puede proponer a sus alumnos algunos materiales

Para el profesor

Ayres, F. Jr, *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc graw–Hill / Interamericana de México.

Castañeda de Isla, E. (2000). *Geometría analítica en el espacio*. México: UNAM–Facultad de Ingeniería.

Colección “Temas de Matemáticas” editada por la facultad de Ciencias de la UNAM.

De Oteysa, E. *et al*. (2007) *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica*. México: Mc graw–Hill.

Hirsch, C. y Schoen, H. (1987). *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. México: McGraw–Hill.

Holliday, B. *et al*. (2002). *Geometría Analítica con Trigonometría*. México: Mc graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Morales, H. y Molina, A. (2002). *Matemáticas III*. México: Trillas.

Ramírez, A. (2013). *Geometría Analítica, una introducción a la geometría*. México: UNAM–Facultad de Ciencias.

Rees, P. & Sparks, F. (1984). *Trigonometría*. México, Reverté.

Ruiz, J. (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

Dirección General de Bibliotecas

Los libros electrónicos están disponibles en texto completo para toda la comunidad de la UNAM

Se sugiere explorar los sitios electrónicos siguientes:

<http://dgb.unam.mx/ >
<http://dgb.unam.mx/ >
<http://www.fciencias.unam.mx/servicios/biblioteca/electronicos>
<http://www.fciencias.unam.mx/servicios/biblioteca/electronicos>

En la página del CCH en Internet, alumnos y profesores tienen acceso a diversos materiales. El profesor debe conocer y puede proponer a sus alumnos algunos materiales

índice

MATEMÁTICAS IV

Ubicación del curso

La orientación del programa apunta a la consolidación e integración de conceptos y procedimientos de los ejes temáticos abordados en los cursos anteriores, tanto en el manejo de expresiones algebraicas y del plano cartesiano, como en el estudio de relaciones numéricas entre objetos matemáticos. El curso busca profundizar y ampliar el concepto de función; identificar sus elementos; incorporar la notación funcional; analizar cualitativamente las relaciones entre los parámetros de la representación algebraica, numérica, gráfica y la forma de variación de la función en cuestión; explorar simetrías y transformaciones en el plano e introducir la noción de función inversa, fomentando así, *la reversibilidad del pensar*, esto es, la inversión de una secuencia de operaciones o de un proceso del pensamiento.

Este semestre constituye un momento de síntesis y culminación, tanto en lo temático como en lo metodológico de las matemáticas del *tronco común* del Colegio; a la vez, prepara el inicio de otra etapa, en donde el concepto de función jugará un papel importante en el estudio del cálculo, la estadística y otras disciplinas.

El objeto función permite avanzar en los ejes metodológicos del área de matemáticas y en el desarrollo de habilidades, trabajar con conceptos de mayor abstracción, establecer generalizaciones, obtener modelos algebraicos, analizar comportamientos, así como: determinar parámetros, interpretar gráficas, resultados y construir sentido dentro del contexto de situaciones de modelización y resolución de problemas.

Las funciones que se trabajan corresponden a formas esenciales de variación, lo que permite mostrar una amplia gama de aplicaciones de esta herramienta fundamental de la matemática.

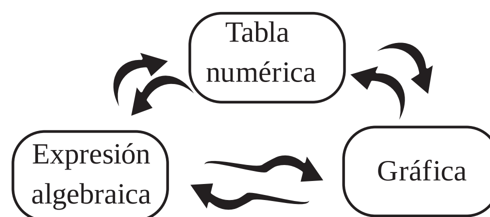
En cuanto objetos matemáticos, las funciones se expresan y aprenden a través de los registros de representación: algebraico, numérico (tabla) y gráfico. Manipular las representaciones de una función es la llave de entrada a su conocimiento.

índice

Propósitos del curso

A través de diversas actividades, encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión conceptual y de procedimientos, al finalizar el curso el alumno:

- Incrementará su capacidad de resolución de problemas al conocer y manejar nuevas herramientas para modelar y analizar situaciones y fenómenos que se pueden representar con las funciones estudiadas en el curso.
- Enriquecerá y utilizará de manera integrada diversos conceptos y procedimientos de aritmética, álgebra y trigonometría, así como geometría euclidiana y analítica en el estudio y modelización de fenómenos y situaciones diversas, en que intervienen las funciones abordadas en el curso.
- Modelará diversas situaciones que involucran variación y a través del análisis del comportamiento de la función respectiva, obtiene información y conclusiones sobre la situación modelada.
- Apoyado con *software* realizará exploraciones numéricas y gráficas, sistemáticas, captando las relaciones entre los parámetros de la expresión analítica (algebraica) de funciones de distinto tipo y las gráficas correspondientes. Identificará la forma básica de la gráfica asociada con la expresión analítica y viceversa; esto es, dada una expresión algebraica infiere el comportamiento gráfico y dada la gráfica, deduce información relevante de ella. Con base en lo anterior, consolida su manejo del plano cartesiano.
- Analizará, de las funciones estudiadas en el curso, la variación (el cambio) en forma puntual, global y en intervalos. Entenderá la noción de tasa de variación y la aplica en diferentes situaciones modeladas por diversas funciones.
- Comprenderá y manejará el concepto función como una relación entre las variables independiente y dependiente, que asocia a cada elemento de la primera variable, un único elemento de la segunda variable.
- Para funciones elementales, realizará la transición, en los dos sentidos, entre los registros de representación típicos de las funciones, como muestra el diagrama.



Contenidos Temáticos
Matemáticas IV

Unidad	Nombre de la unidad	Horas
1	Funciones polinomiales	25
2	Funciones racionales y funciones con radicales	15
3	Funciones exponenciales y logarítmicas	20
4	Funciones trigonométricas	20

índice

Matemáticas IV.
Unidad 1. Funciones polinomiales

Propósito: Al finalizar, el alumno: Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados.	Tiempo: 25 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el desarrollo de la unidad se sugiere, además del trabajo individual, el trabajo en equipo, privilegiando la participación activa del grupo:
Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.	• Relación. • Noción generalizada de función. • Situaciones que se modelan con una función polinomial. • Relación entre dos variables. • Regla de correspondencia. • Dominio y rango.	• El profesor inicia la unidad con ejemplos no necesariamente numéricos de relaciones entre dos conjuntos, enfatizando cuando sean funciones y reconoce el dominio, el rango y la regla de correspondencia. • El profesor presenta diferentes tipos de gráficas que permitan a los alumnos diferenciar funciones de las que no lo son. • El alumno utiliza *software* dinámico para la verificación de bosquejos a lápiz y papel de gráficas de funciones.
Comprende el significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales. Usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.	• Notación funcional: $f(x)= a_n x^n+ \ldots +a_1 x+a_0$ • Intervalos.	El profesor propone a los alumnos organizados en equipos, ejemplos de funciones polinomiales de la forma $f(x)= a_n x^n+ \ldots +a_1 x+a_0$ donde identifique los términos que la conforman, evaluan las funciones e identifiquen el dominio y el rango por medio de intervalos.
Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.	• División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco. • Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación. • Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico. • Graficación de funciones.	• El profesor propone como tema de investigación la división sintética. • El profesor revise las características de las funciones lineales y cuadráticas (raíces enteras, raíces racionales, raíces complejas, ceros, gráfica) para extenderlas a las funciones polinomiales de grado mayor a dos. • El profesor propone al alumno organizado en equipos graficar diferentes funciones del tipo $f(x) = (x \pm a)^n$ con n par e impar e identifica las características comunes. • El profesor propone a los alumnos organizados en equipos construir ecuaciones dando exclusivamente raíces enteras, después con raíces racionales y comparar los coeficientes principales y los términos independientes de las ecuaciones.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• El profesor muestra el proceso de cálculo de los ceros de una función y obtendrá el valor de la función para un punto diferente a las raíces de la ecuación para bosquejar su gráfica. • El alumno por medio de un *software* dinámico grafique funciones para verificar bosquejos a lápiz y papel.
Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.	Cálculo de ceros y graficación de funciones.	• El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, construir funciones polinomiales proporcionando las raíces de la ecuación y que realicen la gráfica de algunas funciones que satisfagan las raíces dadas. • El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, funciones polinomiales para calcular los ceros y realicen su gráfica. • El alumno por medio de un *software* dinámico analice los parámetros de $f(x) = ax^n + b$ lo que permite entender la graficación de las funciones polinomiales
Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.	Problemas de aplicación.	• El profesor propone problemas empezando con áreas y volúmenes para la obtención de una expresión funcional y a partir de ésta busca las soluciones y las interpreta en el contexto del problema. • El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, problemas sencillos de diferentes ámbitos. • El alumno por medio de un *software* dinámico aproxima el valor de raíces irracionales.

índice

Unidad 2. Funciones racionales y funciones con radicales

Propósito: Al finalizar, el alumno: Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada.	Tiempo: 15 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el desarrollo de la unidad se sugiere además del trabajo individual, el trabajo en equipo, privilegiando la participación activa del grupo:
	Funciones racionales	
Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.	Funciones de la forma: $f(x)=\frac{(p(x))}{(q(x))}, q(x) \neq 0$ con *p(x) y q(x)*, polinomios de coeficientes reales, de grado menor o igual a dos.	• El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, trabajar con problemas que involucren la expresión *v=d/t*, su gráfica, con distancia constante analizando que pasa cuando *t* tiende a cero, a infinito o menos infinito. • El profesor utiliza las fórmulas de fuerza electrostática entre dos cargas y fuerza de gravitación entre dos masas para ilustrar la variación inversa y otras aplicaciones.
Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.	Elementos de las funciones: • Dominio. • Rango.. • Asíntotas verticales. • Puntos de discontinuidad. • Ceros de la función.	• El profesor muestra que para graficar las funciones racionales primero se localiza las asíntotas verticales, los huecos y los ceros y dará valores entre cada uno de estos elementos para graficar. • El profesor propone a los alumnos organizados en equipos trabajar diversos problemas con diferente grado de dificultad de estas funciones. • El alumno verifique, por medio de un *software* dinámico, los bosquejos de las gráficas.
Realize gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.	Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y horizontales.	• El profesor proporcione a los alumnos organizados en equipos problemas que impliquen el cálculo de la asíntota horizontal. Ejemplo: $f(x)=\frac{8x^4 - 2x^3 + 5}{2x^4 + 3x - 2}$ dando valores para $x = 10$, $x=100$, $x=1000$ y ver a qué valor tiende. (en este caso: si $x \rightarrow \infty$ $f(x) \rightarrow 4$). El profesor formalice con el teorema de las asíntotas horizontales.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• El profesor propone a los alumnos organizados en equipos graficar diferentes funciones racionales. Primero localice las asíntotas verticales, horizontal, los huecos, los ceros y da valores entre estos elementos para realizar su gráfica. • El alumno por medio de un *software* dinámico grafica diferentes funciones y trazará las asíntotas verticales y horizontal. • El alumno por medio de un *software* dinámico explora las funciones alrededor de los puntos de discontinuidad.
Resuelve problemas de aplicación.	Problemas de aplicación.	• El profesor propone, como tema de investigación en equipos, la aplicación de estas funciones en diferentes campos del conocimiento. • El alumno explore, por medio de un *software* dinámico, los cambios en las gráficas a partir de las modificaciones en sus parámetros.
Funciones con radicales		
Explora problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.	• Funciones de la forma: • $f(x) = \sqrt{ax \pm b}$ • $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ • con $a, b, c \in \mathbb{R}$. • Elementos de las funciones: • Dominio. • Rango. • Ceros de la función.	• El profesor ilustre con problemas sencillos que involucren triángulos rectángulos donde la base es constante y tanto la altura como la hipotenusa son variables. • El profesor ilustre la resolución de desigualdades de primer y segundo grados sin caer en un estudio exhaustivo de éstas para que el alumno identifique el dominio y los ceros de la función. En el caso del rango, el profesor sugiere el uso de un graficador o proyecta las gráficas construidas con algún programa.
Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.	Gráfica de funciones con radicales.	• El profesor propone a los alumnos organizados en equipos graficar funciones que involucren subradicales con ecuaciones de primer y segundo grados. • El alumno verifique, por medio de un *software* dinámico, los bosquejos de las gráficas elaborados con lápiz y papel.
Resuelve problemas de aplicación.	Problemas de aplicación.	El profesor propone a los alumnos problemas sencillos de optimización como: La construcción de una lata cilíndrica de un volumen dado, distancia mínima de dos móviles que se separan en direcciones perpendiculares, figuras geométricas inscritas o circunscritas en otra figura.

Unidad 3. Funciones exponenciales y logarítmicas

Propósito: Al finalizar, el alumno: Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica.	Tiempo: 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el desarrollo de la unidad se sugiere además del trabajo individual, el trabajo en equipo, privilegiando la participación activa del grupo:
	Funciones exponenciales	
Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.	Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial.	El profesor ilustre situaciones que involucren crecimiento o decaimiento exponencial, como crecimiento de población, interés compuesto, decaimiento radiactivo, depreciación, entre otros.
Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica.	Estudio analítico y grafico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo: $f(x) = ab^x$ con $b > 1$ ó $0 < b < 1$ y $a \neq 0$.	• El profesor use modelos de crecimiento o decaimiento exponencial y pide a sus alumnos analizar el comportamiento de la variación mediante: la graficación, el cálculo de la razón de cambio para series de intervalos de igual longitud, el cálculo de la razón entre los valores de la función para valores de x igualmente espaciados. Esta actividad es propuesta para ser trabajada en equipos. • Los alumnos en equipos grafiquen diferentes funciones exponenciales de la forma. $f(x) = ab^x$ con $b > 1$ ó $0 < b < 1$ y $a \neq 0$ • Los alumnos con *software* dinámico verifiquen las gráficas realizadas a lápiz y papel.
Identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su gráfica.	Relación entre los parámetros de: $f(x) = ab^x$ con su gráfica.	• Los alumnos en equipos grafiquen funciones exponenciales y simbolicen su dominio y rango por medio de intervalos. • El alumno, con el uso de un *software* dinámico, verifique las gráficas realizadas a lápiz y papel.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número *e*	Importancia de la función: $f(x) = ae^x$ y sus aplicaciones.	• El profesor propone problemas de reinversión que permiten aproximarse al número *e*. • El alumno analice, por medio de un *software* dinámico, las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases. • Los alumnos grafiquen por medio de un *software* dinámico familias de funciones exponenciales variando los parámetros de las funciones.
Resuelven problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.	Problemas de aplicación.	• El profesor propone a los alumnos organizados en equipos resolver ecuaciones exponenciales sencillas. • El profesor propone a los alumnos organizados en equipos resolver problemas de cultivos de bacterias, de desintegración radioactiva, interés compuesto, entre otros.
Funciones logarítmicas		
Comprende el concepto de logarítmo de un número base b y las relaciones: $b^y=x \leftrightarrow y=log_b\, x$	Logarítmo base b de un número y su relación con la potencia base *b*.	El profesor propone a los alumnos organizados en equipos cambiar expresiones sencillas en forma logarítmicas a forma exponencial y viceversa.
Opera con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.	Propiedades de logaritmos • Cambio de base	El profesor propone a los alumnos organizados en equipos y con base en las leyes de los logaritmos, resolver diferentes ecuaciones logarítmicas de la misma base o diferente base, enfatizando en los logaritmos de base 10 y base *e*.
Grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango.	Definición, gráfica, dominio y rango.	El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, graficar diferentes funciones logarítmicas identificando el dominio y rango.
Verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.	La función logaritmo como inversa de la función exponencial.	• El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, obtener la inversa de la función logarítmica y su gráfica, con ejemplos sencillos. • El profesor grafique: $f(x)=b^x$, $y = x$, $f(x)=log_b\, x$ En esta construcción señalar que una gráfica es la imagen de la otra y viceversa, si $y = x$ se considera un espejo. • Los alumnos por medio de un *software* dinámico grafiquen diferentes funciones y sus inversas.
Resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.	• Situaciones que involucren variación de tipo logarítmico. • Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.	• El profesor analice un caso de aplicación de funciones logarítmicas como los terremotos. • Los alumnos en equipos resuelven problemas sencillos que involucren el uso de las propiedades de logaritmos.
Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.	Resolución de problemas.	• Los alumnos en equipos resuelven problemas de cultivos de bacterias, de desintegración radioactiva, interés compuesto, escala de Richter, etcétera. • Los alumnos, por medio de un *software* dinámico, grafiquen funciones logarítmicas variando los parámetros.

índice

Unidad 4. Funciones trigonométricas

Propósito: Al finalizar, el alumno: Comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.	Tiempo: 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el desarrollo de la unidad se sugiere, además del trabajo individual, el trabajo en equipo privilegiando la participación activa del grupo:
	Funciones trigonométricas	
Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.	Situaciones o fenómenos de variación periódica.	El profesor ilustre ejemplos de variación periódica como: fases lunares, horas de luz solar, mareas, movimiento circular, de un péndulo, de un resorte, ondas electromagnéticas, sonoras, etcétera.
Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa	Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones.	El alumno en equipos convierte las medidas angulares de grados a radianes y viceversa con ayuda de su calculadora.
Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.	Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo.	• El profesor muestre la forma como se calculan valores de las razones trigonométricas para cualquier ángulo. • El profesor propone elaborar en equipos una tabla para obtener seno, coseno y tangente de los ángulos $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ empleando los triángulos rectángulos que tienen ángulos de 30°, 45° y el círculo unitario.
Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = sen\ x$, $f(x) = cos\ x$	Funciones trigonométricas: $f(x) = sen\ x$, $f(x) = cos\ x$ Grafica, dominio, rango, ceros amplitud, periodo.	El alumno, en equipos, grafique la función seno, coseno por medio del circulo unitario e identifique los ceros de la función, y los valores máximos y mínimos que adquieren las funciones.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x) = D + A\text{sen}(Bx + C)$ $f(x) = D + A\cos(Bx + C)$ *D* desplazamiento vertical, *A* amplitud, *B* frecuencia, y desfasamiento.	Gráfica de las funciones: $f(x) = D + A\text{sen}(Bx + C)$ $f(x) = D + A\cos(Bx + C)$ Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los parámetros: *A, B, C* y *D*	• El alumno, en equipos, realice gráficas de las funciones seno y coseno con cada uno de los parámetros observando el cambio, con dos parámetros, con tres y con todos los parámetros. • El alumno por medio de un *software* dinámico realice diferentes gráficas variando los parámetros *A, B, C, D* y comprueba las gráficas realizadas con lápiz y papel.
Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica	Problemas de aplicación.	• El profesor propone problemas de variación periódica para que los alumnos los resuelvan en equipos. • Los alumnos se auxilien con un *software* dinámico para comprobar la solución de los problemas.

Referencias

Para el alumno

Básica:

Johnson, L. , Steffensen, Arnold R. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones*. México: Trillas.

Leithold, L. (1999). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Oxfod University Press.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

Kelly, T., Anderson, J. y Balomeros, R. (1996). *Álgebra y Trigonometría*. México: Trillas.

Complementaria:

Barnett, R., Zeegler, M. y Byleen, K. (2000). *Álgebra*. México: Mc. Graw Hill.

Para el profesor

Barnett, R., Zeegler, M. y Byleen, K. (2000). *Álgebra*. México: Mc. Graw Hill.

Demana, F., Waits, B., Foley, G. y Kennedy, D. (2007). *Precálculo Gráfico, Numérico, Algebraico*. México: Pearson Addison Wesley.

Johnson, L. , Steffensen, Arnold R. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones*. México: Trillas.

Kelly, T., Anderson, J. y Balomeros, R. (1996). *Álgebra y Trigonometría*. México: Trillas.

Leithold, L. (1999). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Oxfod University Press.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

LIGAS DE INTERÉS EN LA RED

1) Libros maravillosos. (s.f.) **Recuperado el 27 de abril de 2015**
<www.librosmaravillosos.com/>
Entre los libros que contiene:

- El diablo de los números
- El hombre que calculaba
- La seducción de las Matemáticas
- Matemáticas recreativas, entre otros

2) Illuminations Instituto de Verano (2009) NCTM, E. U. Recuperado el 27 de abril de 2015
<http://illuminations.nctm.org/Activities.aspx?grade=all>
(Actividades interactivas de la NCTM)

3) Proyecto Descartes INTEF (s.f.) **España. Recuperado el 27 de abril de 2015 <**http://recursostic.educacion.es/descartes/web/index.html>
(El Proyecto Descartes abarca temas desde la primaria hasta el bachillerato)

4) Proyecto Gauss INTEF (s.f.) España. **Recuperado el 27 de abril de 2015**
<http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/materiales_didacticos.htm>
(El proyecto Gauss contiene materiales interactivos para temas desde primaria hasta bachillerato)

5) Universo matemático Antonio Pérez (guionista y presentador) (2005) España. **Recuperado el 27 de abril de 2015**
<http://www.planetamatematico.com/index.php?option=com_content&task=view&id=93&Itemid=103>
Serie galardonada que consta de 10 capítulos emitidos en el programa de Televisión Educativa de TVE–2 "La Aventura del Saber". Entre los capítulos están:

1. *Pitágoras: mucho más que un teorema*
2. *Historias de Pi*
3. *Números y cifras: un viaje en el tiempo*
4. *Fermat: el margen más famoso de la historia*

6) Wolframalpha. (s.f.) Recuperado el 27 de abril de 2015
<http://www.wolframalpha.com/>
Wolfram | Alpha introduce una nueva forma de obtener el conocimiento y respuestas a muchas áreas del conocimiento incluidas las Matemáticas.

7) "**Gacetilla Matemática**" Desde 1998 el objetivo de G.M. es difundir en la red el fabuloso mundo de las matemáticas anécdotas, problemas, libros, enlaces, los más grandes matemáticos etcétera
<http://www.arrakis.es/~mcj/>

8) El portal académico del CCH, **Recuperado el 27 de abril de 2015. C**ontiene guías para el profesor, material interactivo, así como textos de interés pedagógico.
<http://portalacademico.cch.unam.mx/>

9) KhanAcademy. Recuperado el 27 de abril de 2015. Contiene diferentes videos con explicaciones de temas de matemáticas.
<http://www.youtube.com/user/KhanAcademyEspanol>





Para la elaboración de este Programa se agradece la participación de: Carlos Esteban Arteaga Carmona, Venustiano Bautista Santiago, Isabel Patricia Andrea Cafaggi Félix, Guadalupe Xochitl Chávez Pérez, Florencio Cleofas de Jesús, Oscar Cuevas de la Rosa, Daniel Flores Ibarra, Alfredo González Barrera, Eduardo Víctor Marañón Rodríguez, Víctor Manuel Martínez Gallardo, Bertha Medina Flores, Marco Antonio Santillán Vázquez, Florencio Vera Butanda

índice




1971
2016
Escuela Nacional Colegio
de Ciencias y Humanidades

